

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

33. Band, Heft 1

16. März 1950

S. 1—48

Geschichte.

• **Proclus de Lycie:** Les commentaires sur le premier livre des éléments d'Euclide, traduits pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke. Collection de Travaux de l'Académie Internationale d'Histoire des Sciences. Nr. 1. Bruges: Desclée De Brouwer, 1948. XXIV, 372 p., 121 fig. br. fr. 400.—

Verf. stützt diese schon 1939 abgeschlossene und nunmehr unter Beihilfe der Unesco zum Druck beförderte französische Erstübersetzung des Proklos-Kommentars auf die griechische Ausgabe von G. Friedlein (Leipzig 1873) und zieht an kritischen Textstellen neben der neueren Zweitliteratur auch die lateinische Fassung von Fr. Barozzi (Padua 1560) mit heran. Wo es sich um greifbare mathematische Zusammenhänge und Einzelfragen handelt, bewährt sich Verf. als trefflicher Kenner der antiken Mathematik und spart nicht mit erwünschten kurzen Erläuterungen und Hinweisen auf weiterführende Literatur. Den philosophischen Auffassungen des Autors, auf die er nur streifend eingeht, steht er anscheinend innerlich fern. Deshalb hören wir kaum etwas von der antiken Vorgeschichte, nichts vom mittelalterlichen Milieu und allzuwenig von der Aufnahme der Prokleischen Lehren in der Renaissance, die sich nur langsam und in zäher Arbeit zum richtigen Verständnis und zur tieferen Bedeutung des schwierigen Textes durchzuringen vermochte. Demgemäß ist die Übersetzung an solchen Stellen nicht immer befriedigend ausgefallen. Trotz dieses Mangels kommt der vorliegenden Ausgabe hohe fachliche Bedeutung zu. Der Kenner wird sie neben der vorzüglichen deutschen Übersetzung von L. Schönberger O. S. B. (aus dem Nachlaß ed. M. Steck, Halle 1945), die dem Verf. leider vor der Drucklegung nicht mehr zugänglich war, nicht vermissen wollen. Die Ausstattung ist gut; bedauerlicherweise sind Druckfehler stehen geblieben. Daß das Register nur auf die in der Übersetzung erwähnten Namen beschränkt ist, beeinträchtigt die Verwendbarkeit der wertvollen Literaturangaben.

J. E. Hofmann (Tübingen).

• **Maier, Anneliese:** Die Vorläufer Galileis im 14. Jahrhundert. Roma: Edizioni di „Storia e Letteratura“ 1949. 307 p.

In Weiterführung ihrer Studien über „Das Problem der intensiven Größe in der Scholastik“, Leipzig 1939, über „Die Impetustheorie der Scholastik“, Wien 1940 und „An der Grenze von Scholastik und Naturwissenschaft“, Essen 1943 gibt Verf. eine groß angelegte Übersicht über die Strömungen, Tendenzen und Einzelergebnisse der spätscholastischen Schulen auf mechanischem Gebiet. Einleitend behandelt sie die Aristotelische Bewegungslehre, die sich auf die metaphysisch-sprachlogische Deutung der Erscheinungen bei Veränderungen von Substanz, Qualität, Quantität und Ortsveränderung bezieht und von den Scholastikern vor allem im Sinn des Albertus Magnus zur Kenntnis genommen wurde. Anschließend wird die Wesensbestimmung der Bewegung, das Prinzip von der Erhaltung der Materie und die neben der metaphysischen Zergliederung des Bewegungsvorgangs stehende, auf die Anwendung des Kausalitätsgesetzes gestützte naturwissenschaftliche Erklärungsweise vorgeführt. Besonders interessant sind die in Oxford durch Bradwardine, in Paris durch Buridan inaugurierten mathematisch-physikalischen Fragestellungen. Bradwardine ersetzt 1328 das Aristotelische Bewegungsgesetz $v = K : R$ (K = bewegende Kraft, R = Widerstand) durch $v \sim \log (K/R)$ (schöne Entdeckung der Verf.!); seine Schüler wenden die rechnende Methode auf zahlreiche physische und psychische Probleme an, erschöpfen sich jedoch in Subtilitäten, ohne auf meßbare Beobachtungsergebnisse zu achten. Später wird die Abweichung Bradwardines von Aristoteles, der nach wie vor maßgebliche Autorität bleibt, durch einen Übersetzungsfehler (!) erklärt und der Begriff der Totalgeschwindigkeit (mittlere Geschwindigkeit) geprägt. Buridan bildet die unzulängliche Aristotelische Erklärung der Wurfbewegung (Antrieb im Medium) bewußt zur Impetustheorie um, wonach der geworfene Körper auf Grund der sich langsam verzehrenden mitgegebenen Wucht weiterbewegt wird, die in der Rechnung an Stelle von K tritt. Die anschließende Diskussion über Stetiges und Unendliches gibt viele bisher unbeachtet gebliebene Einzelheiten aus gedruckten und ungedruckten Traktaten, geht jedoch an einer wichtigen Angelegenheit, nämlich der Kontingenzwinkelfrage, vorüber. In den abschließenden Ausführungen über den weltanschaulichen Auffassungswandel im Kreise der Spätscholastiker wird vor allem die bisher zu wenig beachtete oberitalische Averroistenschule hervorgehoben. — Die mit zahlreichen Auszügen aus seltenen Drucken und vor allem aus unedierten Vatikan-Hand-

schriften belegten Darlegungen der Verf. klären viele bisher kaum bekannte physikalisch-mathematische Einzelfragen aus dem 14. Jh. und berichtigen das bisher als maßgeblich Angesehene in entscheidender Hinsicht.
J. E. Hofmann (Tübingen).

● **Caspar, Max: Johannes Kepler.** Stuttgart: W. Kohlhammer 1948. 179 S., 4 Bildnisse. In Leinen DM 18.—

Diese Biographie aus der Feder des erfahrenen Herausgebers und Übersetzers der Schriften Keplers will in erster Linie das reich bewegte äußere Lebensschicksal des edlen Mannes wahrheitsgetreu schildern und in die eigentümliche Denkweise des Forschers einführen, die wesentlich von der Lust zur philosophischen Spekulation im Sinne von Platon und Proklos und vom heißen Ringen um den tieferen Sinn der Glaubenswahrheiten bestimmt wird. Um dieser allgemeinen Tendenz willen, die das weltanschauliche Element besonders hervorhebt und bewußt den Wahrheitssucher in den Mittelpunkt der Betrachtung stellt, konnte leider auf die unsterblichen wissenschaftlichen Leistungen Keplers nur in knappen Worten eingegangen werden. Der Spezialforscher sieht sich über vieles bisher Unbekannte belehrt, vermißt jedoch das Sachregister und bedauert, daß ihm mangels genauerer Hinweise die Möglichkeit versagt bleibt, wenigstens die schon im Druck vorliegenden Einzelbelege einzusehen. Ein kleiner Ersatz ist das sehr sorgfältig gearbeitete Namenregister des vortrefflich ausgestatteten Werkes.
J. E. Hofmann (Tübingen).

Whittaker, Edmund: Laplace. Math. Gaz., London 33, 1—12 (1949).

Ein in glänzendem Stil geschriebener Gedächtnisaufsatz zum Geburtstag (23. III. 1749) von Laplace mit vielen wertvollen (in den üblichen Darstellungen unrichtig geschilderten) biographischen Einzelheiten und einer Übersicht über die Hauptleistungen auf mathematischem und astronomischem Gebiet.
J. E. Hofmann (Tübingen).

● **Voellmy, E.: Jost Bürgi und die Logarithmen.** (Beihefte zu: Elemente der Mathematik, Nr. 5). Basel: Verlag Birkhäuser 1948. 24 S., fr. 3. 50.

Liebevoll gezeichnete Biographie im Rahmen des Wohlbekannten mit einer auf den Unterricht in der höheren Schule abgestimmten Einführung in die Erfindungsgeschichte der Logarithmen und die Eigenart der Bürgischen Tafeln.
J. E. Hofmann (Tübingen).

● **Kollros, Louis: Jakob Steiner.** (Beihefte zu: Elemente der Mathematik Nr. 2). Basel: Verlag Birkhäuser 1947, 24 S., fr. 3. 50.

Mit diesem Heft begann Ende 1947 eine Reihe kurzer Biographien von Schweizer Mathematikern zu erscheinen. Es enthält, eingeflochten in den äußeren Lebensgang, eine eindrucksvolle Darstellung der wissenschaftlichen Bedeutung Jakob Steiners (1796—1863) und eine kurze, aber alles Wesentliche berührende Übersicht über seine Arbeiten. Verf. schildert, wie der Bauernjunge aus dem Kanton Bern, der erst mit 14 Jahren schreiben lernte, durch die Schule Pestalozzis in Yverdon hindurchgeht, in Heidelberg studiert und schließlich nach Berlin kommt, wo er sich zum bedeutendsten Geometer seiner Zeit und zu einem der fruchtbarsten geometrischen Geister aller Zeiten entwickelt. Er würdigt Steiners im Druck erschienene Arbeiten und verfolgt ihre Entstehung an Hand seiner Tagebücher und hinterlassenen Manuskripte. Er erwähnt zahlreiche Sätze, die Steiner ausgesprochen hat und die erst später bewiesen wurden. Er zeigt, wie der geniale Mann, von einfachen Fragestellungen ausgehend, sich zu immer schwierigeren Problemen erhebt, wie er aus wenigen elementaren Sätzen mit mathematischer Schärfe und tiefer Kombinationsgabe ganz allein auf synthetischem Wege die Geometrie um zahlreiche neue Sätze bereichert oder bekannte auf einfache und originelle Weise bewiesen hat und wie er scheinbar zusammenhanglose Sätze einem allgemeinen Gedanken unterzuordnen verstand. Er weist hin auf gleichzeitige ähnliche Arbeiten anderer Mathematiker, die Steiner meist nicht kannte, und auf die zahlreichen Untersuchungen, die zu seinen Lebzeiten und nach seinem Tode an seine Entdeckungen anknüpfen, sie weiterführen oder die Verbindung mit anderen Gebieten der Mathematik herstellen. Die Ernte, die aus Steiners Saat heranwächst, ist heute noch nicht vollständig eingebracht, und manche von ihm gestellten Probleme harren noch der Lösung. — Die kurzen Streiflichter auf den Menschen Steiner verbergen auch die schwierigen Seiten seines Wesens nicht. So zeichnet die Arbeit, die mit zwei guten Bildern Steiners und einer Probe seiner klaren Handschrift in Faksimile geschmückt ist, für den Forscher und für den Studierenden nicht nur die Gestalt eines genialen Autodidakten, sondern auch eine beziehungsreiche Skizze vom Werden der synthetischen Geometrie und ihrer Entwicklung bis zur Gegenwart.
E. Löffler (Stuttgart).

Archibald, Raymond Clare and Marion Elizabeth Stark: Jacob Steiner's geometrical constructions with a ruler, given a fixed circle with its center. Scripta math., New York 14, 187—264 (1948).

● **Burekhardt, J. J.: Ludwig Schläfli.** (Beihefte zu: *Elemente der Mathematik*, Nr. 4). Basel: Verlag Birkhäuser 1948. 23 S., fr. 3.50.

Wie Jakob Steiner, so stammt auch der jüngere Ludwig Schläfli (1814—1895) aus dem Kanton Bern. Er studierte Theologie, trat aber nie ein Pfarramt an, sondern wurde 1837 Lehrer an der Bürgerschule in Thun, beschäftigte sich nebenher mit höherer Mathematik, lernte 1843 Jakob Steiner und Lejeune Dirichlet kennen, wurde 1847 Privatdozent in Bern und hungerte sich durch, bis er 1868 Ordinarius in dieser Stadt wurde, wo er zeitlebens bleibt, ganz dem Dienste der Wissenschaft hingegeben. Neben diesen äußeren Daten von Schläflis Leben gibt Verf. einen Einblick in seine vielseitige wissenschaftliche Tätigkeit. Er würdigt seine erste große Arbeit über die Resultante eines Systems mehrerer algebraischer Gleichungen (1851), die zu einem ausgedehnten Briefwechsel mit Cayley führte. Er skizziert den reichen Inhalt des im Jahre 1852 abgeschlossenen umfangreichen Werkes über die Theorie der vielfachen Kontinuität, das erst nach Schläflis Tode im Druck erschien (1901) und in dem viele Entdeckungen anderer Gelehrter auf dem Gebiet der mehrdimensionalen Geometrie vorweggenommen sind. Neben den in englischen Zeitschriften veröffentlichten Arbeiten über Flächen dritter Ordnung wird eine unveröffentlichte Einführung in die Theorie dieser Flächen erwähnt. Die Vielseitigkeit der Begabung Schläflis erhellt daraus, daß ihm auch grundlegende Arbeiten zur Zahlentheorie und zur Funktionentheorie zu verdanken sind. Zu den letzteren gehören insbesondere scharfsinnige Abhandlungen über Kugelfunktionen, Besselfunktionen, Modularfunktionen und Modulargleichungen. Der ausgedehnte wissenschaftliche Briefwechsel Schläflis, besonders mit Jakob Steiner, Cayley, Borchardt und italienischen Mathematikern, der zum Teil veröffentlicht ist, und die große Schule Schweizerischer Mathematiker, die er gebildet hat, zeigen die Weite seines Wirkens. Erstaunlich ist, daß er noch Zeit und Kraft zu botanischen Studien und zu eindringenden Sprachstudien fand und sich zu einem scharfsinnigen Veda-Kenner ausbildete. — Verf. hat dieses Lebensbild liebevoll gezeichnet, er ist von berechtigtem Stolz auf die Leistungen seines großen Landsmannes erfüllt. Das Heft mit zwei Bildern Schläflis und einer Handschriftprobe aus jener unveröffentlichten Einführung in die Theorie der Flächen dritten Grades geschmückt. Am Schluß vergleicht der Verf. Schläfli mit anderen zeitgenössischen Schweizer Gelehrten und teilt mit, daß im Auftrag der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft eine auf drei Bände berechnete Gesamtausgabe von Schläflis Abhandlungen im Erscheinen begriffen ist. *Eugen Löffler* (Stuttgart).

● **Kagan, V. F.: Lobačevskij.** 2. erweiterte Aufl. Moskau-Leningrad: Verlag der Akad. d. Wiss. d. USSR 1948. 506 S., geb. R. 25,—. [Russisch].

Dies Buch enthält vor allem eine ausführliche Biographie Lobačevskis, zusammen mit einem Geschichtsabriß der mit seinem Namen untrennbar verknüpften Kasaner Universität. Die Einleitung bringt eine Übersicht über die bisherigen Arbeiten auf diesem Gebiet, woraus hervorgeht, daß für Leser, die nicht Russisch verstehen, auch heute noch das in Zusammenarbeit mit Wassiliew verfaßte Buch von Engel aus dem Jahre 1898 die ausführlichste Darstellung enthält, während die übrige Quellenforschung im wesentlichen auf Russisch veröffentlicht ist. Davon wird als vollständigste Sammlung des neuesten Materials die große Monographie von Modsalewski „Lobačevski, Materialien für seine Biographie“. Akad. Wiss. USSR 1948, wesentlich herangezogen. Auf den ersten 145 Seiten schildert das vorliegende Buch nun die Wirksamkeit Lobačevskijs bis zur Entdeckung der Nichteuclidischen Geometrie. Die nächsten 220 Seiten behandeln dann Lobačevskijs Hauptarbeiten zur Parallelen-theorie sowie seine Wirksamkeit als Professor und Rektor der Kasaner Universität bis zu seinem Tode. Die weiteren 100 Seiten behandeln dann auch die sonstige Vorgeschichte und weitere Entwicklung der Nichteuclidischen Geometrie mit einer zugehörigen Bibliographie. Dem Buch sind gegenüber der ersten Auflage noch einige Seiten aus der Feder Dulsiks hinzugefügt über die Förderung künstlerischer, insbesondere baulicher Dinge durch Lobačevskij. Es sei noch erwähnt, daß dem Buch 25 Bilder beigelegt sind, mehrere Abbildungen des Haupthelden, Faksimiles von ihm, Kasaner Baulichkeiten usw.

Burau (Hamburg).

● **Coolidge, Julian Lowell: The mathematics of great amateurs.** Oxford: Clarendon Press; London: Oxford University Press, 1949. VIII, 212p. 21s. net.

Der verdiente Verf., dessen Stärke in der feinsinnigen Deutung fachlicher Einzelheiten in mathematikgeschichtlichen Gegenständen liegt, gibt hier gut eingeleitete Stücke aus Platon, al-Hajjāmi, Pietro dei Franceschi, Leonardo da Vinci, Dürer, Neper, Pascal, Arnauld, de Witt, Hudde, Brouncker, l'Hospital, Buffon, Diderot, Horner und Bolzano in englischer Übersetzung wieder. Die Auswahl bezieht sich nicht auf das Alltägliche, sondern auf wohlgelungene Seltenheiten, ohne sich jedoch in Nebensächlichkeiten zu verlieren. Das Mathematikbuch ist im Geist der Zeit erklärt und stellt fast durchwegs zufrieden, aber das obendrein unzuverlässige Register ist voll von unzutreffenden Angaben. Verf. hat es verübt, sich über die moderne Zweitliteratur bibliographischen, biographischen und sinndeutenden Inhalts ausreichend zu unterrichten, und kommt gelegentlich auf diesem Gebiet zu unhaltbaren Schlüssen. Daher kann das vorzüglich ausgestattete Buch trotz seines spannenden Inhalts nur mit Vorsicht benutzt werden.

J. E. Hofmann (Tübingen).

Amato, V.: Michelo Cipolla. *Sunto della commemorazione fatta all'Accademia Gioenia nella seduta del 1° febbraio 1948.* Mat., Catania 3, III—XVI (1948).

Wissenschaftliche Würdigung und Schriftenverzeichnis.

Severi, Francesco: Annibale Comessatti. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 7, 239—242 (1947) [Spanisch].

Severi, Francesco: Michele de Franchis. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 7, 279—281 (1947) [Spanisch].

Smirnov, V. I.: Rodion Osievič Kužmin, 1891—1949. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 13, 385—388 (1949) [Russisch].

Orts, J. Ma.: Das mathematische Werk von E. Lindelöf. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 8, 19—22 (1948) [Spanisch].

Guzmán, Simón Archilla: D. Daniel Marin Toyos. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. s. 8, 243—245 (1948) [Spanisch].

Rossinskij, S. D.: Karl Michajlovič Peterson (1828—1881). Uspechi mat. Nauk 4, Nr. 5 (33), 3—13 (1949) [Russisch].

Wissenschaftliche Würdigung.

Loria, Gino: Paul Tannery, engineer and historian. Scripta math., New York 13, 155—162 (1947).

Hammerschmidt, William W.: Alfred North Whitehead. Scripta math., New York 14, 17—23 (1948).

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

Niggli, Paul: Symmetrieprinzip und Naturwissenschaften. Studium gen., Berlin 2, 225—231 (1949).

Das Symmetrieprinzip kommt in der Natur in Folgendem zur Geltung: 1. Es findet sich unter dem Naturgeschaffenen immer so viel Gleichartiges oder doch Ähnliches, daß Zusammenfassungen zu Arten möglich sind (z. B. Atom-, Molekel-, Kristall-, Pflanzen-, Tierarten); 2. der stufenförmige oder hierarchische Aufbau der Naturkörper und deren innere Gliederung führt zur Symmetriellehre; 3. in der Natur herrschen gewisse Auswahl- oder Selektionsprinzipien und 4. in der Systematik von Formen und Gestalten und in der mathematischen Behandlung eines Problems (Symmetrieprinzipien im engeren Sinne). Am Beispiel der Kristallkunde wird die Bedeutung des Symmetrieprinzips erläutert, wobei besonders auch auf den Unterschied Idealdefinition — Realbegriff hingewiesen wird. *W. Nowacki.*

Burington, R. S.: On the nature of applied mathematics. Amer. math. Monthly 56, 221—242 (1949).

Als angewandte Mathematik wird nicht nur die Bereitstellung mathematischer Begriffe und Methoden zum Zwecke der Anwendungen betrachtet, sondern überhaupt wissenschaftliche Arbeit auf irgendeinem Forschungsgebiet mit Hilfe mathematischer Begriffe und Methoden. Die Tätigkeit wird folgendermaßen gegliedert: 1. Das Forschungsgebiet F wird durch ein vereinfachtes damit isomorphes Modell M ersetzt. 2. Das Modell M wird durch ein idealisiertes Modell M' ersetzt. 3. Das Modell M' wird mathematisch erforscht. 4. Die erzielten Resultate werden am Modell M interpretiert. 5. Die für M gewonnenen Resultate werden auf das Gebiet F übertragen. — Als Kriterium für die Anwendbarkeit der Resultate wird deren „predictive“ Charakter angesehen. In der Tätigkeit 1 und 2 ist große Sorgfalt notwendig. *Nyström (Helsinki).*

• **Kattsoff, L. O.:** A philosophy of mathematics. Ames, Ia.: Iowa State College Press 1948. IX, 266 p. \$ 5.—.

Das Buch will eine Einführung in die mannigfachen philosophischen Probleme, die durch die Existenz der mathematischen Wissenschaft aufgeworfen werden, geben. Für ein Verständnis

dieser Probleme hält es eine wenigstens prinzipielle Kenntnis der Methoden und Ergebnisse der modernen Grundlagenforschung für die wesentlichste Voraussetzung. Nach einem Überblick über das Verhältnis von Mathematik und Philosophie werden zunächst einige Definitionen der Mathematik (ältere und neuere, z. B. solche von Euler, Gauß, Bolzano, Peirce, Russell u. a.) gegeben und näher untersucht, wobei Verf. zum Schluß kommt, daß jede dieser Definitionen immer nur einen Teilaspekt der gesamten Mathematik bietet. Es folgt ein Kapitel über die Natur der mathematischen Objekte. Verf. unterscheidet hier fünf Standpunkte: Intuitionismus, Empirismus, Konventionalismus, Logizismus, Formalismus. Für jede dieser Ansichten läßt Verf. einen oder mehrere Vertreter, übrigens fast durchweg Mathematiker, selbst zu Wort kommen, wie die folgenden Überschriften des IV. bis XIII. Kapitels zeigen: IV. Freges Definition der Zahl. Russell und die logistische Definition der Zahl. V. Paschs empirisch-axiomatische Definition der Zahl. Die rein axiomatische Definition der Zahl. VI. Erweiterung des Zahlensystems. VII. Mengenlehre und transfinite Zahlen. Die Antinomien bei der Grundlegung der Mathematik. VIII. Begründung der Mathematik I: Logistische Grundlegung. Chwisteks nominalistischer Versuch. IX. Begründung der Mathematik II: Hilberts Formalismus. X. Churchs elementaristische Mathematik: Kombinatorische Grundlegung. XI. Begründung der Mathematik III: Intuitionismus. Modale Logik. XII. Das Gödelsche Theorem und formale Systeme. XIII. Mannourys signifikante Grundlegung. Es folgt ein Kapitel über die Struktur der mathematischen Systeme, in der das mathematische Operieren möglichst eingehend beschrieben wird, und eines über die axiomatische Methode. In einem Schlußkapitel wird auf das Verhältnis von Mathematik und Wirklichkeit eingegangen, wobei betont wird, daß Mathematik nicht nur ein Hantieren mit Symbolen ist, sondern eine menschliche Konstruktion, die Beziehung zu empirischen Daten hat. „Sie hat daher syntaktische, soziologische, psychologische und wissenschaftliche Bereiche für ihre Untersuchung. Die Verwechslung oder Isolation von syntaktischen, pragmatischen und semantischen Problemen führt immer zur Unklarheit oder zur Abstraktion“. — Die Darstellung der Hauptzüge der verschiedenen Theorien ist durchweg sachgemäß, oft aus den Originalabhandlungen entnommen. Eine tiefer gehende philosophische Analyse wird nicht gegeben. Verf. begnügt sich meist mit einigen kurzen Hinweisen, inwiefern ihm der vertretene Grundgedanke nicht richtig oder einseitig zu sein scheint. Doch ist es wohl sein Hauptzweck, erst mal eine Basis für derartige Diskussionen zu geben. — Einige kleine Ausstellungen: VIII, S. 96: Die axiomatische Form des Aussagenkalküls ist für die Lösung des Entscheidungsproblems in diesem Bereiche durchaus nicht erforderlich, während man aus den Ausführungen des Verf. das Gegenteil entnehmen könnte. XV, S. 241: Der Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Axiome des Aussagenkalküls mit Hilfe der Wertungsmethode ist unvollständig wiedergegeben, da die Ableitungsregeln nicht berücksichtigt sind. Das gleiche gilt für den auf S. 242 angegebenen Unabhängigkeitsbeweis, der so, wie ihn der Verf. dargestellt hat, überhaupt nicht durchgeführt werden kann. — Am meisten ist zu bemängeln an der Darstellung der Hilbertschen Beweistheorie in Kap. IX. Prinzipiell wäre zu sagen, daß der grundlegende Gedanke, daß die metamathematischen Überlegungen sich im Bereiche der intuitionistisch zulässigen Schlußweisen bewegen, nirgends erwähnt ist. Ferner will Hilbert nur die Widerspruchsfreiheit der Annahme des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten zeigen, nicht aber die tatsächliche Entscheidbarkeit jeder Behauptung. Außerdem ist die ganze Darstellung veraltet. Sie wird abgeschlossen mit der ausführlichen Wiedergabe einer längst überholten Arbeit von J. von Neumann vom Jahre 1927, während die späteren Widerspruchsfreiheitsbeweise von Gentzen (1938) und dem Ref. (1940) für das volle zahlentheoretische System nicht berücksichtigt wurden. [Die Gentzensche Arbeit ist übrigens im Literaturverzeichnis aufgeführt, aber mit falscher Jahreszahl (1928!).] Der zweite Band des Buches von Hilbert und Bernays über die Grundlagen der Mathematik ist nicht einmal erwähnt. — Ref. hat den Eindruck, der gelegentlich auch bei der Lektüre anderer Kapitel sich aufdrängt, daß es sich bei dem Buche um eine Zusammenstellung von Vorlesungen über die verschiedenen Kapitel handelt, die zeitlich weit auseinander liegen, und daß die einzelnen Kapitel bei der Zusammenstellung nicht auf den gegenwärtigen Stand gebracht worden sind. Nun kann sich natürlich ein philosophisches Buch über die Grundlagen der Mathematik, das an der Einzeltechnik der Beweise nicht interessiert ist, grundsätzlich mit einer ersten Publikation begnügen, falls sich an den dort benutzten Methoden nichts geändert hat und falls nicht die Ergebnisse der Beweise eine besondere Rolle spielen. Hier fehlt aber z. B. die Berücksichtigung des methodisch besonders wichtigen 2. Bandes des Hilbert-Bernaysschen Buches, der gerade in bezug auf das Verhältnis der Beweistheorie zum Gödelschen Satze die grundlegenden Ausführungen enthält. — Wir möchten dem Verf. wünschen, daß er bei einer etwaigen Neuauflage diese Mängel beseitigt. Abgesehen davon ist das Buch eine Erscheinung, die sowohl dem für die Grundlagen seiner Wissenschaft interessierten Mathematiker wie dem Philosophen etwas bietet. Auch dem selbst auf dem Gebiete der Grundlagen arbeitenden Mathematiker wird es nicht unlieb sein, in einem Bande eine gedrängte Zusammenfassung der Hauptsysteme zu haben. Erwähnt sei z. B., daß sogar die Fregesche Symbolik, die auch den meisten Logistikern eine unbekannte Größe ist, im IV. Kapitel eine Erläuterung gefunden hat.

Wilhelm Ackermann (Lüdenscheid).

Vredenduin, P. G. J.: The constructive method. Proc. 10. internat. Congr. Philos., Amsterdam 1948, 2, 749—751 (1949).

Die „inhaltlich“ geführten Widerspruchsfreiheitsbeweise der Hilbertschen Schule erfordern eine Formalisierung des „finiten Schließens“. Auf dem Wege hierzu definiert Verf. ein „konstruktives System“ durch endlich viele Basiselemente und -operationen. Iterierte Anwendung der Basisoperationen erzeugt aus den Basiselementen alle Elemente des Systems. Daher ist eine „Induktion“ über alle Elemente möglich. Diese wird für ein Beispiel formalisiert hingeschrieben. Der Vortrag enthält ferner Beispiele formalisierter konstruktiver Definitionen und Beweise. *Lorenzen (Bonn).*

Aubert, K. E.: A group-theoretical remark of E. Hoff-Hansen concerning certain expressions in the quantification theory. Arch. Math. Naturv., Oslo 49, Nr. 7, 151—156 (1947).

Für die Quantifikatoren $\forall x, \overline{\forall}x, \exists x, \overline{\exists}x$ der zweiwertigen Logik wird die Äquivalenz von Ausdrücken $q_1 x_1 \dots q_n x_n \bar{F}(x_1, \dots, x_n)$ für festes F (evtl. \bar{F}) und beliebige Quantifikatoren q_i, x_i mit Hilfe einer „Multiplikation“ der Ausdrücke untersucht, so daß diese eine abelsche Gruppe bilden. Die Äquivalenz zwischen den Ausdrücken wird dadurch zu einer Kongruenzrelation nach einer Untergruppe. *Lorenzen (Bonn).*

Riguet, J.: Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois. Bull. Soc. math. France 76, 114—154 (1948).

Die Arbeit soll als Vorbereitung für eine allgemeine Theorie der binären Relationen (Rel.) dienen, insbesondere für eine Verallgemeinerung der Galoisschen Theorie. — Dazu werden die grundlegenden Begriffe über binäre Rel. — im Anschluß an de Morgan, Frege, Schröder — untersucht, und zwar wird systematisch mit den Rel. selbst gerechnet, der Rückgang auf die Elemente nach Möglichkeit vermieden. I. Für binäre Rel. R, R_1, \dots werden definiert: $xR^{-1}y: yRx$; $xR_1R_2z: \exists y xR_1y \wedge yR_2z$; $R_1 \subset R_2: xR_1y \rightarrow xR_2y$; $x \in R(y): xRy$. Es werden viele Identitäten über diese und andere Definitionen abgeleitet, u. a. der „Dedekindsche Satz“: $R_1 R_2 \subset R \subset (R_1 \cap R R_2^{-1})(R_2 \cap R_1^{-1} R)$. Anschließend werden reflexive, symmetrische ($R \subset R^{-1}$), transitive ($RR \subset R$), „difunktionelle“ ($RR^{-1}R \subset R$), Rel. untersucht. Reflexive, difunktionelle Rel. sind Äquivalenzrel. — R heißt „überall definiert“ bzw. „quasi-funktionell“, wenn $R(x)$ für jedes x mindestens bzw. höchstens ein Element enthält. II. Für Ordnungen \prec (reflexiv, transitiv) werden besonders die verstandstheoretischen Begriffe untersucht. III. Eine Abbildung φ einer geordneten Menge in sich heißt „Abschließung“, wenn $x \prec \varphi(x)$ für jedes x . Sind E, F geordnet und e bzw. f Abbildungen von F bzw. E in E bzw. F , so heißt (f, e) eine Galoissche Korrespondenz, wenn e und f monoton abnehmend sind: $x_1 \prec x_2 \rightarrow e(x_2) \prec e(x_1)$, $y_1 \prec y_2 \rightarrow f(y_2) \prec f(y_1)$, und außerdem ef und fe Abschließungen sind. Außer der Galoisschen Theorie liefern auch Zuordnungen zwischen „Topologien“, z. B. zwischen allen Umgebungsrelationen und allen Konvergenzrelationen einer Menge Beispiele Galoisscher Korrespondenzen. *Lorenzen.*

Algebra und Zahlentheorie.

Kombinatorik:

Peremans, W. und J. Kemperman: Numerierungsproblem von S. Dockx. Actual. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1949, 005, 4 S. (1949) [Holländisch].

Gegeben ist eine unendliche Folge von Quadraten V_1, V_2, \dots . Jedes Quadrat V_m ist in $4m^2$ quadratische Felder geteilt. Diese Felder sind von innen nach außen in „Schalen“ zusammengefaßt: Die innerste Schale bilden die 4 mittleren Felder, die zweite Schale die an die erste außen anstoßenden 12 Felder, die dritte die an die zweite anstoßenden 20 Felder usw.

In jeder Schale wird eine obere und eine untere Hälfte unterschieden. Jedes Feld erhält eine Rangnummer n : Die vier Felder von V_1 erhalten die Nummern 1—4, die 16 Felder von V_2 die Nummern 5—20, die 36 Felder von V_3 die Nummern 21—56 usw. Die Numerierung beginnt in jedem Quadrat in der oberen Hälfte in der äußersten Schale von links nach rechts, geht dann ebenso in der nächsten Schale wieder von links nach rechts usw. bis zu den beiden oberen Feldern der innersten Schale. In der unteren Hälfte jedes Quadrats V_m verläuft die Numerierung symmetrisch zur oberen Hälfte bezüglich des Mittelpunktes von V_m . In jedes Feld jedes Quadrats wird nun nach besonderer Vorschrift eine Zahl geschrieben, und zwar in der oberen Hälfte in die Felder der innersten Schale 0, 0; in die Felder der nächsten Schale von links nach rechts 1, 0, —1, —1, 0, 1; in die Felder der folgenden Schale 2, 1, 0, —1, —2, —2, —1, 0, 1, 2 usw. Die Felder der unteren Hälfte bekommen Zahlen, die den symmetrisch liegenden Zahlen der oberen Hälfte entgegengesetzt gleich sind. Verf. bezeichnen die in das Feld mit der Rangnummer n fallende Zahl mit $f(n)$. Sie stellen und lösen die Aufgabe, $f(n)$ durch n auszudrücken. Die Lösung lautet: Man setze $a_k = \frac{2}{3}k(k+1)(2k+1)$ und nenne r die kleinste ganze Zahl k , für die $a_k \geq n$ ist. Dann ist $i = \left[\frac{a_r - n}{2r^2} \right]$ entweder 0 oder 1. Man setze $p = a_r - n + 1 - 2ir^2$

und nenne s die kleinste ganze Zahl m , für die $2m^2 \geq p$ ist. Dann ist $j = \left[\frac{2s^2 - p}{2s - 1} \right]$ entweder 0 oder 1. Schließlich ist $f(n) = (-1)^{i+j} [2s^2 - p + 1 - j(2s - 1) - s]$. Zacharias.

Aigner, Alexander: Gerade und ungerade Permutationen in geordneter Reihenfolge. *Elemente Math.*, Basel 4, 52—54 (1949).

L'A. traite à nouveau le problème simple de la dépendance entre le signe de la permutation (paire ou impaire) et son numéro d'ordre dans la répartition lexicographique des $n!$ permutations. Il obtient en particulier cette dépendance en décomposant l'ensemble des $n!$ permutations en n périodes d'ordre maximum $(n-1)!$, qui contiennent chacune les permutations avec le même premier élément, puis chacune de ces périodes à son tour en $(n-1)$ périodes d'ordre maximum $(n-2)!$, qui contiennent chacune les permutations avec le même second élément, et ainsi de suite.

S. Bays (Fribourg).

Lévy, Paul: Sur deux classes de permutations. *C. r. Acad. Sci.*, Paris 228, 1089—1090 (1949).

Lévy, Paul: Sur une classe remarquable de permutations. *Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. S. 35, 361—377 (1949).

Il s'agit de deux permutations des n éléments $1, 2, \dots, n$. L'une, P_n , est simple. Elle est en notation analytique $|x, y|$ où $y = 2x - 1$ pour $2x \leq n + 1$ (1), et $y = 2(n - x + 1)$ (2), pour $2x > n + 1$. L'autre Q_n , est plus compliquée; la loi qui définit $y = f(x)$ fait intervenir un indice k pour chaque élément x , de sorte que la liaison entre x et y est donnée par $2n - y = 2k(n - x) + 2^{k-1}$. Si y est donné, il est aisé de voir que cette relation définit à la fois k et x ; inversement la donnée de x définit à la fois k et y en tenant compte que les valeurs de y sont 1 à n . — Ces deux permutations sont étudiées au point de vue de leurs cycles. Le type d'un cycle d'ordre σ , pour Q_n , est défini par la suite des σ indices de ses éléments; pour P_n le type est défini par la succession des σ opérations (1) ou (2). L'A. considère alors les ensembles de n pour lesquels Q_n et P_n contiennent des cycles d'un type donné. Il établit au sujet de ces ensembles et de ces types de cycles des théorèmes contenant séparément des résultats pour Q_n et pour P_n et également des théorèmes exprimant les relations entre P_n et Q_n . L'étude de Q_n est appliquée aux deux cas particuliers $n = 2^a$ et $n = 2^a + 1$.

S. Bays (Fribourg).

Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

Kreis, H.: Über die Potenzsummen der natürlichen Zahlen. *Elemente Math.*, Basel 4, 54—56 (1949).

Ist $S_p(n) \equiv \sum_{i=1}^n i^p$, $p = 2, 3, \dots$, so gilt: $S_{2a}(n) = n(n+1)(2n+1)P_{a-1}[(2n+1)^2]$, $S_{2a+3}(n) = n^2(n+1)^2Q_a[(2n+1)^2]$, wobei $P_j[u]$ und $Q_j[u]$ Polynome j -ten Grades in der Unbestimmten u bedeuten.

G. Kantz (Graz).

Corput, J. G. van der: Sur les fonctions symétriques. Actual. Math. Centrum, Amsterdam, Scriptum 3, 17 S. (1949).

Man bilde mit Hilfe der (untereinander vertauschbaren) Unbestimmten z_1, \dots, z_m die Summe aller verschiedenen Produkte, die aus $z_1^{k_1} \dots z_r^{k_r} z_{r+1}^0 \dots z_m^0$ durch Permutation der Indizes $1, \dots, m$ entstehen und bezeichne diese „einfache Summe“ mit (k_1, \dots, k_r) . Insbesondere sind dann $(1), (1, 1), \dots$ die elementarsymmetrischen Funktionen a_1, a_2, \dots der Unbestimmten z_i . Der Differentialoperator $[k_1, \dots, k_r]$ sei folgendermaßen definiert:

$$[k_1, \dots, k_r] = \frac{1}{j_1! j_2! \dots} \sum_{\mu_1=k_1}^m \dots \sum_{\mu_r=k_r}^m a_{\mu_1-k_1} \dots a_{\mu_r-k_r} \frac{\partial^r}{\partial a_{\mu_1} \dots \partial a_{\mu_r}},$$

wobei j_1, j_2, \dots die Anzahl der resp. untereinander gleichen Zahlen unter k_1, \dots, k_r bezeichnet und man $a_0 = 1$ zu setzen hat. Verf. beweist folgende Sätze: Wird der k -gliedrige Operator $[1, \dots, 1]$ auf die durch die a_i ausgedrückte einfache Summe (k_1, \dots, k_r) angewandt, so erhält man eine einfache Summe (k'_1, \dots, k'_{r-1}) oder Null, je nachdem k unter den Zahlen k_1, \dots, k_r vorkommt oder nicht. Dabei entsteht die Zahlenmenge k'_1, \dots, k'_{r-1} aus k_1, \dots, k_r durch Weglassen einer Zahl k . — Bei Ersetzung jeder einfachen Summe (k_1, \dots, k_r) durch den entsprechenden Operator $[k_1, \dots, k_r]$ geht eine Identität zwischen einfachen Summen in eine Operatorenidentität über.

T. Szele (Debrecen).

• Aitken, A. C.: Determinants and matrices. 6. ed. London and Edinburgh: Oliver and Boyd Ltd. New York: Interscience Publishers Ltd. 1949. 151 p.

Die 1. Aufl. ist dies. Zbl. 22, 100 erwähnt, aber nicht besprochen. — Das Buch behandelt, von Matrizen ausgehend, die Determinantentheorie. Von den üblichen Darstellungen unterscheidet es sich unter anderm in folgenden Punkten, die hervorgehoben werden mögen: 1. Der Begriff der Permanente: Ist A eine Matrix, so ist die Permanente

$|A|$ die Summe aller Produkte $a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{nv}$ mit durchwegs voneinander verschiedenen α, β, \dots, v , also wie bei der Determinante, aber ohne das dort auftretende Vorzeichen. 2. Die Besprechung der Zwittermatrizen (hybrid compounds). Sind A, B zwei quadratische Matrizen der Ordnung n , so ist das Element c_{ij} der Zwittermatrix $(A; B)$ die Determinante, die entsteht, wenn die i -te Zeile von A durch die j -te von B ersetzt wird. Es bleibt $(A; B) = B \text{ adj } A$ (adj Adjungierte) und $|A; B| = |B| |A|^{n-1}$. 3. Die Schweinschen Arbeiten (1825) über Quotienten von Determinanten. 4. Die Alternanten (verallgemeinerte Vandermondesche Determinanten), insbesondere die konfluenten Alternanten. 5. Die Faktorentzerlegung zentrosymmetrischer Determinanten, d. h. solcher, bei denen $a_{ij} = a_{n+1-i, n+1-j}$ ist (n Ordnung der Determinante). — Das Buch enthält folgende Kapitel: I. Definition und Fundamenteigenschaften der Matrizen. II. Definition und Eigenschaften der Determinanten. III. Adjungierte und inverse (reciprocal) Matrix; Lösung von Gleichungssystemen; Rang und lineare Abhängigkeit. IV. Cauchy- und Laplace-Entwicklungen; Multiplikationstheoreme. V. Ableitungen der Matrizen (compound matrices) und zugehörige Determinanten, Dualsätze. VI. Spezielle Determinanten; Alternanten, persymmetrische Determinanten, Bigradianten; zentrosymmetrische, Jacobische, Hessesche, Wronskideterminanten. — Unter Bigradianten versteht Verf. Resultanten. Jedem Abschnitt sind zahlreiche Aufgaben beigelegt. Holzer.

Parodi, M.: Sur une propriété des déterminants gauches. Ann. Soc. sci. Bruxelles, Sér. I. 63, No. 2, 81—82 (1949).

Verf. beweist den Satz: Der Realteil der Wurzeln der Gleichung

$$F(z) = \begin{vmatrix} a+z & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & a+z & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & a+z \end{vmatrix} = 0, \quad a > 0, a_{ij}^2 \geq 0,$$

ist ausnahmslos negativ ($= -a$). — Wird nämlich $a+z = u$ und $F(z) = F_1(u)$ gesetzt, so hat a) $F_1(u) = 0$ keine von Null verschiedene reelle Wurzel (s. Kowalewsky, Determinantentheorie, 3. Aufl. § 67 bzw. § 53, Satz 37). b) Es ist $[F_1(u)]^2$ eine symmetrische Determinante, die ein Polynom in u^2 ist, das nur für reelle Werte von u^2 annulliert wird (loc. cit.). Diese sind wegen a) sämtlich ≤ 0 , somit u als Wurzel von $F_1(u)$ entweder $= 0$ oder rein imaginär und $\Re(z) = -a$. — Unter der

weiteren Voraussetzung, daß $F(z)$ nur einfache Wurzeln hat und m ein reeller oder komplexer Parameter mit $\Re(m) > 0$ ist, sind die Realteile der Wurzeln des Polynoms $F(z) + mF'(z)$ zufolge eines Satzes von Cesaro [Nouv. Ann. Math. III. S. 4, 321—327 (1885)] kleiner als „ $-a$ “ Kantz (Graz).

Littlewood, D. E.: Invariants of systems of quadrics. Proc. London math. Soc., II. S. 49, 282—306 (1947).

Mit Invarianten von 10 quaternären quadratischen Formen, die linear in jeder Form sind, haben sich schon H. W. Turnbull und A. Young beschäftigt [Trans. Cambridge philos. Soc. 23, 264—302 (1926)]. Hier wird dieselbe Frage als Anwendung der sogenannten S -Funktionalanalysis behandelt. Nach dem sehr einfachen Beispiel von vier binären quadratischen Formen, wo die gesuchten Invarianten sich auf drei voneinander linear unabhängige reduzieren, und nach vier allgemeinen vorbereitenden Sätzen diskutiert Verf. die Fälle von 3 oder 6 oder 9 ternären quadratischen Formen; und dann diejenigen von 4, 6, 8, 10 quaternären Formen. Im ersten Falle findet man bzw. 1, 16, 876 linear unabhängige Invarianten; und im zweiten Falle bzw. 1, 5, 126, 3396 linear unabhängige Invarianten. Wichtig ist die Verteilung der gefundenen Invarianten auf primitive Gruppen; diese Verteilung hängt von dem Verhalten der Invarianten gegenüber den Permutationen der gegebenen Formen ab. Weitere Fragen, die behandelt werden, sind: die Reduzibilität der primitiven Invariantengruppen; die gesamte Anzahl der Invarianten von m quadratischen Formen, die einen Grad ≤ 10 haben; und die wirkliche Aufstellung der Invarianten. E. G. Togliatti (Genova).

Littlewood, D. E.: On the concomitants of spin tensors. Proc. London math. Soc., II. S. 49, 307—327 (1947).

Die Bestimmung der invarianten Bildungen eines Tensors für die ganze lineare Gruppe oder für eine ihrer Untergruppen und diejenige der invarianten Bildungen der entsprechenden algebraischen Form, deren Koeffizienten den gegebenen Tensor bilden, sind gleichwertige Fragen. Dies ist nicht mehr der Fall für die zweiwertigen Spinoren, die aus einer orthogonalen Gruppe in einer beliebigen Anzahl n von Veränderlichen entstehen. Verf. untersucht hier das Invariantensystem eines Spinors. Die verfolgte Methode ist eine Anwendung früherer Untersuchungen desselben Verf. über Transformationsgruppen (The theory of group characters and matrix representations of groups, Oxford 1940; dies. Zbl. 25, 9]; auch die Rechnung mit S -Funktionen spielt hier eine wichtige Rolle. Verf. legt eine neue Bedeutung der Reduzibilität einer invarianten Bildung zugrunde und untersucht dann die invarianten Bildungen der Basisspinoren, d. h. der Tensoren, die von einer Basisspinorendarstellung transformiert werden; diese Darstellung ist diejenige, die der Partition $((\frac{1}{2})^n)$ von n entspricht. Die Rechnungen laufen verschieden, je nachdem $n = 2\nu$ oder $n = 2\nu + 1$ ist; sie werden zunächst für $n = 3$ bis 8 vollständig durchgeführt; in diesen Fällen findet man keine invariante Bildung eines Grades größer als 2. Für ein beliebiges n wird die Rechnung nur für den Grad 2 durchgeführt. Für $n = 10$ und $n = 11$ findet man auch invariante Bildungen 3. und 4. Grades; die wirkliche Konstruktion jener Invarianten eines Grades größer als 2 für 10 oder mehr als 10 Veränderlichen erscheint aber als eine sehr schwierige Aufgabe. Schließlich einiges über den Fall, wo der Grundspinor kein Basisspinor ist; und als Beispiel eines Tensors mit zwei Veränderlichenreihen der Doppelwellentensor von Eddington. E. G. Togliatti (Genova).

Gruppentheorie:

Croisot, Robert: Hypergroupes partiels. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1090—1092 (1949).

Eine partielle Hypergruppe (Halbhypergruppe) H [bez. des Begriffes „Hyper-

gruppe (Multigruppe)“ s. Kuntzmann, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, IV. S. 3, 155—193 (1939); dies. Zbl. 24, 298] ist ein System von Elementen α, β, \dots , in dem das Produkt $\alpha \cdot \beta$, das nicht für alle Paare (α, β) erklärt zu sein braucht, eindeutig nicht durch ein Element, sondern durch eine Teilmenge von H definiert ist; es ist aber, falls erklärt, assoziativ. Außerdem soll in H eine Teilmenge U von skalaren Einheiten existieren, so daß jedes Element aus H zweiseitige Elemente besitzt. H heißt inversabel, wenn aus $\alpha \beta \supset \gamma$ folgt $\alpha'' \gamma \supset \beta$ und $\gamma \beta' \supset \alpha$, wobei α'' linksinvers zu α und β' rechtsinvers zu β ist. „Inversabel“ fällt bei Halbhyperringen mit „normal“ bzw. „auflösbar“ zusammen. Spezielle Arten inversabler Halbgruppen werden weiter vom Verf. untersucht.

D. A. Kappos (Erlangen).

Croisot, Robert: Algèbres de relations et hypergroupes partiels. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1181—1182 (1949).

Eine verallgemeinerte Relationenalgebra ist ein Boolescher Vollverband A , in dem zusätzlich eine Multiplikation mit folgenden Eigenschaften erklärt ist:

1. $(r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t)$, 2. $0 \cdot r = r \cdot 0 = 0$, wobei 0 das Verbandsnullelement.
3. es gibt ein $e \in A$, so daß $e \cdot r = r \cdot e = r$, 4. $r \cdot \left(\bigcup_{\beta} s_{\beta} \right) = \bigcup_{\beta} (r \cdot s_{\beta})$ und $\left(\bigcup_{\alpha} r_{\alpha} \right) s = \bigcup_{\alpha} (r_{\alpha} \cdot s)$, 5. $e' : (e' : r) = r$, wobei e' Verbandskomplement zu e und $r : s = \bigcup_{s \cdot x \subseteq r} x$ be-

deutet, 6. $e' : (r \cdot s)' = (e' : s') \cdot (e' : r')$. Gilt zusätzlich: 7. Aus $r \supset 0$ folgt $1 \cdot r \cdot 1 = 1$, wobei 1 das Verbandseinselement, dann wird A mit A_1 bezeichnet. Es sei nun M eine inversable Halbhyperringe (s. vorst. Referat); gilt in M zusätzlich: „wenn $\varepsilon \in U$ und $\varepsilon' \in U$, so existiert mindestens ein $\alpha \in M$, so daß $\varepsilon \alpha$ und $\alpha \varepsilon'$ einen Sinn haben (dabei bedeutet U die Menge der skalaren Einheiten von M)“, so wird M mit M_1 bezeichnet. Fügt man jetzt zu dem Booleschen Vollverband aller Teilmengen von M (bzw. M_1) zu den Verbandsoperationen zusätzlich die Multiplikation von M (bzw. M_1) hinzu, so entsteht eine Relationenalgebra A (bzw. A_1) und umgekehrt besitzt jede atomare verallgemeinerte Relationenalgebra A (bzw. A_1) eine Darstellung dieser Art. Ein entsprechender Satz für Brandtsche Gruppoide wird ohne Beweis erwähnt.

D. A. Kappos (Erlangen).

Chow, Wei-Liang: On the algebraical braid group. Ann. Math., Princeton, II. S. 49, 654—658 (1948).

Kurzer und eleganter Beweis von Sätzen über die Zöpfgruppe, welche zugleich die Resultate anderer Arbeiten enthalten. [Siehe Satz von A. Ivanowsky in A. Markoff, Trudy Inst. Math. Stekloff 16 (1945) ferner F. Bohnenblust, dies. Zbl. 30, 178; Ref., Math. Ann., Berlin 109, 617—646 (1934); dies. Zbl. 9, 39]. — Es sei \mathfrak{B}_n die „algebraische Zöpfgruppe“, definiert durch Erzeugende $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ und die Relationen $\sigma_i \sigma_k = \sigma_k \sigma_i$ für $|i - k| \geq 2$, $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ für $i = 1, \dots, n - 2$. Es wird erneut auf algebraischem Wege gezeigt, daß diese mit der von E. Artin [Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 4, 47—72 (1926)] als Gruppe von speziellen Automorphismen einer freien Gruppe eingeführten „topologischen Zöpfgruppe“ isomorph ist. Ferner wird bewiesen, daß das Zentrum von \mathfrak{B}_n nur aus $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^n$ besteht, und daß jedes Element B von \mathfrak{B}_n eindeutig in der Form $B = M A_1 A_2 \dots A_{n-1}$ geschrieben werden kann, wo M durch die dem Element B zugeordnete Permutation eindeutig bestimmt ist und wo A_1, \dots, A_{n-1} Elemente gewisser freier Untergruppen \mathfrak{A}_k ($k = 1, \dots, n - 1$) sind. \mathfrak{A}_k wird erzeugt von den Elementen $a_{kj} = \sigma_k^{-1} \sigma_{k+1}^{-1} \dots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^2 \sigma_{j-1} \dots \sigma_{k+1} \sigma_k$ ($j = k + 1, \dots, n$).

W. Magnus (Altadena).

Lee, H. C.: Sur les groupes de Lie réels à trois paramètres. J. Math. pur. appl. Paris, IX. S. 26, 251—267 (1948).

Die Bestimmung aller reellen Lieschen Gruppen bei gegebener Parameterzahl ist bekanntlich viel schwieriger als die Bestimmung der komplexen Gruppen. Verf. unterwirft die klassischen Ergebnisse für die Parameterzahl $m = 3$ einer Nach-

prüfung. Die Liesche Theorie ergibt folgende 7 Typen komplexer Gruppen (die bis auf einen Isomorphismus bestimmt sind):

- $$\begin{array}{lll}
 (1) (X_2 X_3) = X_3, & (X_3 X_1) = -2 X_2, & (X_1 X_2) = X_1; \\
 (2) (X_2 X_3) = c X_2, & (X_3 X_1) = -X_1, & (X_1 X_2) = 0 \quad (c \neq 1, \quad c \text{ komplex}); \\
 (3) (X_2 X_3) = X_2, & (X_3 X_1) = -X_1, & (X_1 X_2) = 0; \\
 (4) (X_2 X_3) = X_1 + X_2, & (X_3 X_1) = -X_1, & (X_1 X_2) = 0; \\
 (5) (X_2 X_3) = X_2, & (X_3 X_1) = -X_1, & (X_1 X_2) = 0; \\
 (6) (X_2 X_3) = X_1, & (X_3 X_1) = 0, & (X_1 X_2) = 0; \\
 (7) (X_2 X_3) = 0, & (X_3 X_1) = 0, & (X_1 X_2) = 0.
 \end{array}$$

Man erhält daraus die „reellen Formen“ der komplexen Gruppen, wenn man die Variablen sowohl wie den Parameter c als reell voraussetzt. Die Untersuchung von Verf. ergibt nun, daß über diese 7 Typen hinaus noch 2 weitere Typen reeller, 3-parametrischer Gruppen existieren, nämlich

- $$\begin{array}{lll}
 (8) (X_2 X_3) = X_1, & (X_3 X_1) = X_2, & (X_1 X_2) = X_3; \\
 (9) (X_2 X_3) = -X_1 - p X_2, & (X_3 X_1) = p X_1 - X_2, & (X_1 X_2) = 0 \quad (p \geq 0),
 \end{array}$$

wobei die Gruppen (9) entsprechend der stetigen Variabilitätsmöglichkeit von p eine stetige Schar bilden, deren Repräsentanten weder mit einer der Gruppen (1) bis (8), noch mit einer aus (9) selbst durch eine reelle Transformation ähnlich sind. Für jeden der gefundenen 9 Typen werden schließlich lineare Gruppen als Repräsentanten aufgestellt, die also mit den gefundenen homomorph sind. Die angeführten Ergebnisse werden gefunden durch Ausschöpfen aller Möglichkeiten für den Rang der Matrix (c^{hk}) , wobei die c^{hk} mit den Strukturkonstanten c_{ij}^{hk} durch $c^{hk} = \frac{1}{2} \sum_{ij} c_{ij}^{hk} \varepsilon^{ijk}$ verbunden sind (ε^{ijk} = antisymmetrischer Tensor). Hardtwig (München).

Jaskoski, S.: Sur l'application de la théorie générale de symétrie à la cristallographie. *Experientia*, Basel **5**, 66—68 (1949).

Die Theorie des Normalteilers (hier Rhythmus genannt) zur Klassifikation von Kristallklassen mit einer Hauptachse wird auf das kubische System angewandt. Dies führt zu einer neuen Terminologie der 32 Kristallklassen. W. Nowacki.

Verbände. Ringe. Körper:

Etherington, I. M. H.: Non-associative arithmetics. *Proc. R. Soc. Edinburgh A* **62**, 442—453 (1948).

In einer Menge G mit eindeutig ausführbarer Multiplikation werden „Addition“ und „Multiplikation“ von Abbildungen in sich $x \rightarrow x^a$ definiert durch: $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$, $x^{a \cdot b} = (x^a)^b$. Die aus der identischen Abbildung durch Addition entstehenden Abbildungen bilden eine „Arithmetik“. Nur wenn G assoziativ ist, entsteht die gewöhnliche Arithmetik. Alle Arithmetiken lassen sich dadurch erhalten, daß man von einer geordneten Menge ausgeht, diese in echte Untermengen zerlegt, die Untermengen weiter zerlegt usw. bis nur noch einelementige Mengen auftreten. Für endliche Mengen können diese Zerlegungen (partitive numbers) durch Graphen (Setz-bäume) dargestellt werden. Die verallgemeinerten Arithmetiken lassen sich einfach axiomatisch charakterisieren. Verf. untersucht die logischen Abhängigkeiten zwischen zusätzlichen Forderungen wie Kommutativität und Distributivität. Die generalisierte Arithmetik findet Anwendungen in der Biologie (Mendelsche Erbverteilung). Lorenzen (Bonn).

Loomis, L. H.: On the representation of σ -complete Boolean algebras. *Bull. Amer. math. Soc.* **53**, 757—760 (1947).

Eine Boolesche Algebra heißt σ -vollständig, wenn es zu jeder Folge a_i , $i = 1, 2, \dots$, ihrer Elemente ein kleinstes Element $\bigcup_1^\infty a_i$ gibt mit $a_n \subset \bigcup_1^\infty a_i$ für $n = 1, 2, \dots$. Im allgemeinen ist es nicht möglich, zu einer σ -vollständigen Booleschen Algebra eine zu ihr isomorphe Algebra von Punktmengen in dem Sinne zu finden, daß dem

Element $\bigcup_1^\infty a_i$ die Vereinigungsmenge aller den Elementen a_i entsprechenden Punktmengen entspricht. Es wird dagegen bewiesen, daß jede σ -vollständige Boole'sche Algebra zum Quotienten einer σ -vollständigen Booleschen Algebra von Punktmengen und eines σ -Ideals dieser Algebra im obigen Sinne isomorph ist. σ -Ideal einer Algebra von Punktmengen bedeutet hierbei ein System von Punktmengen der Algebra, das die Vereinigung höchstens abzählbar vieler seiner Elemente und den Durchschnitt eines Elements der Algebra und eines Elements des Ideals immer enthält. Dieses Ergebnis umfaßt einen früheren Satz von Bischof [Schr. math. Inst. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin 5, 237—262 (1941); dies. Zbl. 25, 33].

Császár (Budapest).

Costa, A. Almeida: Über die Endomorphismen der Moduln. An. Fac. Ci. Porto 33, 5—32 (1948) [Portugiesisch].

Soit \mathfrak{M} un module (à opérateurs) et soit \mathfrak{R} l'anneau des endomorphismes de \mathfrak{M} . A tout sous-module (stable) \mathfrak{N} de \mathfrak{M} , on peut faire correspondre l'idéal à gauche n de \mathfrak{R} constitué par les éléments $n \in \mathfrak{R}$ pour lesquels on ait $(\mathfrak{M})n \subseteq \mathfrak{N}$. Réciproquement, on peut faire correspondre à tout idéal gauche n de \mathfrak{R} le sous-module (stable) \mathfrak{N}' minimum de \mathfrak{M} pour lequel on ait $(\mathfrak{M})n \subseteq \mathfrak{N}'$. Ces correspondances sont univoques mais, en général, elles ne sont pas biunivoques. En tout cas, elles permettent d'obtenir des propriétés de \mathfrak{M} à partir de celles de \mathfrak{R} et vice versa. L'A. considère quelques unes de ces propriétés; en particulier il étudie avec détail les cas où les chaînes de sous-modules (stables) de \mathfrak{M} admettent des conditions d'extremum.

G. Ancochea (Madrid).

Zahlentheorie:

Bagschi, Haridas: Note on the two congruences $ax^2 + by^2 + e = 0$, $ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 = 0 \pmod{p}$, where p is an odd prime and $a \not\equiv 0$, $b \not\equiv 0$, $c \not\equiv 0$, $d \not\equiv 0 \pmod{p}$. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 18, 311—315 (1949).

Verf. beweist nochmals die Lösbarkeit der ersten Titeltkongruenz, woraus trivialerweise die der zweiten folgt. Satz und Beweis sind nicht neu (vgl. Bachmann, Niedere Zahlentheorie II., Leipzig 1910. S. 323).

Holzer (Graz).

Chater, N. and W. J. Chater: On the determinants of pan-magic squares of even order. Math. Gaz., London 33, 94—98 (1949).

Für panmagische Quadrate der Ordnung 4 gilt bekanntlich in Determinantenbezeichnung $a_{i,k} + a_{i+2,k+2} = s/2$, wenn s die Konstante des Quadrats bedeutet und die Indizes mod. 4 betrachtet werden. Aus dieser Eigenschaft folgern die Verff. leicht $\Delta = 0$ für die Determinante Δ , was früher schon A. H. MacColl festgestellt hat [Math. Gaz., London 30, Nr. 290, Note 1911 (1946)]. Verf. kündigen einen Satz an, nach welchem entsprechend für jedes panmagische Quadrat der Ordnung $2n$ $a_{i,k} + a_{i+n,k+n} = s/n$ gilt, und zeigen unter dieser Voraussetzung wieder das Verschwinden der Determinante.

Sprague (Berlin).

Dorwart, H. L.: Sequences of ideal solutions in the Tarry-Escott problem. Bull. Amer. math. Soc. 53, 381—391 (1947).

Verf. untersucht Tarry-Escott-Gleichungen

$$(1) \quad a_1, \dots, a_s \stackrel{k}{=} b_1, \dots, b_s.$$

Ist der gegebene Teiler aller a_i und b_i eins und überdies $\sum a_i = 0$, so spricht Verf. von einer reduzierten Lösung. Jede Lösung kann mit beliebigem ganzzahligem M, K in $Ma_1 + K, \dots, Ma_s + K \stackrel{k}{=} Mb_1 + K, \dots, Mb_s + K$ übergeführt werden. Dabei sind M, K so wählbar, daß die neue Lösung reduziert ist. Ist stets $a_i = -b_i$ für ungerades s oder $a_{s+1-i} = -a_i, b_{s+1-i} = -b_i$ für gerades s , so spricht Verf. von einer symmetrischen Lösung. Diese ist, wenn die Bedingung der Teilerfremdheit erfüllt ist, stets reduziert. Lösungen, die auf dieselbe reduzierte Lösung führen, nennt Verf. äquivalent. — Das Bestreben des Verf. geht dahin, zu untersuchen,

welche nichtäquivalenten Lösungen aus (1) durch Anwendung des Systems

$$(2) \quad a_1, \dots, a_s, b_1 + h, \dots, b_s + h \stackrel{k+1}{=} b_1, \dots, b_s, a_1 + h, \dots, a_s + h$$

aufgebaut werden können. Hauptgewicht legt er auf ideale Lösungen, d. h. solche mit $s = k + 1$. Von der sofort evidenten symmetrischen Gleichung $a, -a \stackrel{1}{=} b, -b$ kommt man durch Anwendung von (2) und Reduktion, soweit sich symmetrische ideale Lösungen ergeben, nur zum Grade 5. Die Reduktion der nächstfolgenden Lösung mit $k = 6$ ergibt keine ideale Lösung mehr und keine symmetrische, aber merkwürdigerweise kommt man weiterbauend in einem Falle doch auf eine ideale Lösung des Grades 7. — Ausgang von einer idealen symmetrischen Lösung des Grades 2 gibt nur unsymmetrische ideale Lösungen, wobei man bis $k = 4$ kommt. Hier spielen gruppentheoretische Betrachtungen hinein. Ausgang von $k = 3$ gibt eine Folge, die nur zwei Glieder umfaßt, also mit $k = 4$ endigt, und von der Verf. zeigt, daß es die einzige Folge so erhaltener idealer symmetrischer Lösungen ist. — Bei Ausgang von einer Lösung mit $k > 3$ erweist sich der Weg des Verf. als nicht mehr gangbar, da für die Ausgangsgleichung keine vollständige Parameterlösung bisher bekannt ist. Er gibt hiervon nur einige Rechenbeispiele. *Holzer (Graz).*

Wright, E. M.: Equal sums of like powers. *Bull. Amer. math. Soc.* **54**, 755—757 (1948).

Sei $P(s, k)$ der kleinste Wert von j , so daß die Gleichungen $\sum_{i=1}^j a_{i1}^h = \dots = \sum_{i=1}^j a_{is}^h$ für alle Werte von $h \leq k$ gleichzeitig lösbar sind. Verf. beweist: (1) Es ist $P(s, k) \leq (k^2 + k + 2)/2$. (2) Für ungerade k folgt genauer $P(s, k) \leq (k^2 + 3)/2$. *Holzer (Graz).*

Palamà, Giuseppe: Contributo dei recenti risultati delle multigrade al problema di Waring. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. S. **4**, 75—79 (1949).

Verf. verbessert einige Ergebnisse von E. M. Wright [*J. London Math. Soc.* **10**, 94—99 (1935); dies. Zbl. **12**, 196] zum Tarry-Escott-Problem. Hervorgehoben sei insbesondere: Ist $M(k)$ der kleinste Wert von j , so daß $a_1, \dots, a_j \stackrel{k}{=} a'_1, \dots, a'_j$ ist, so folgt bei geradem k , daß $M(k) < (k^2 + 4)/2$. $M(k)$ ist Wrights $P(s, k)$ für $s = 2$. Damit ist für $s = 2$ Wrights neuestes Ergebnis [s. vorsteh. Referat] übertroffen. *Holzer (Graz).*

Lehmer, D. H.: On the converse of Fermat's theorem II. *Amer. math. Monthly* **56**, 300—309 (1949).

Verf. beweist zunächst, daß es unendlich viele Produkte dreier Primzahlen gibt, die $2^n - 2$ teilen. Er gibt weiter eine Liste der Nichtprimzahlen n zwischen 10^8 und $2 \cdot 10^8$ mit dieser Eigenschaft. Die Arbeit ist eine Fortsetzung der Arbeit des Verf., *Amer. math. Monthly* **43**, 347—354 (1936); dies. Zbl. **14**, 102.

Holzer (Graz).

Siegel, Carl Ludwig: Indefinite quadratische Formen und Modulformen. *Studies Essays*, pres. to R. Courant, 395—406 (1948).

Bereits 1938 hat Verf. die Zetafunktion einer indefiniten quadratischen Form mit ganzer Koeffizientenmatrix \mathfrak{S} definiert und dafür Fortsetzbarkeit und Funktionalgleichung abgeleitet [vgl. *Math. Z.* **43**, 682—708 (1938); **44**, 398—426 (1938); dies. Zbl. **18**, 203; **19**, 151]. Vermöge der Mellinschen Transformation ergibt sich aus der Funktionalgleichung der zu \mathfrak{S} gehörigen Zetafunktion, falls \mathfrak{S} die Signatur $n, m - n$ hat und $m - n = \nu$ gerade ist, das Verhalten einer Funktion $F(z) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l e^{2\pi i l z}$ der komplexen Variablen $z = x + iy$, $y > 0$, bei $z \rightarrow -z^{-1}$. Dabei ist cl ($l \geq 1$) mittels des Darstellungsmaßes $M(\mathfrak{S}, 2l)$ von $2l$ durch \mathfrak{S} und des Gruppenmaßes $\mu(\mathfrak{S})$ zu definieren durch $cl = i^\nu M(\mathfrak{S}, 2l)/(\mu(\mathfrak{S}))$ und $c_0 = 1$ zu setzen. Verf. setzt hierbei \mathfrak{S} als Matrix einer geraden quadratischen Form voraus. Ferner müssen

für $m \leq 4$ spezielle Nullformen von der Betrachtung ausgeschlossen werden. — Im vorliegenden beweist Verf. auf kürzerem Weg und allgemeiner, wenn $z \rightarrow (az + b)/(cz + d)$ eine Modulsstitution und ω eine vierte Einheitswurzel bedeutet, daß

$$(1) \quad (cz + d)^{-m/2} F\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \omega F(z)$$

ist. $F(z)$ ist demnach eine Modulform der Variablen z . Dabei muß wieder ν gerade sein, und für $m \leq 4$ müssen spezielle Nullformen ausgeschlossen werden. Ferner wird angenommen, daß $c > 0$ und außer \mathfrak{S} auch $c\mathfrak{S}^{-1}$ Matrix einer geraden quadratischen Form ist. — Um (1) zu beweisen, nimmt Verf. außer $z = x + iy$, $y > 0$, eine davon unabhängige Variable $\zeta = \xi + i\eta$, $\eta < 0$. Weiter nimmt er an, die positiv definite quadratische Form \mathfrak{H} genüge der Matrizengleichung $\mathfrak{H}\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$, und setzt $\mathfrak{R} = \frac{1}{2}(z + \zeta)\mathfrak{S} + \frac{1}{2}(z - \zeta)\mathfrak{H}$. Bedeutet $\mathfrak{R}[g]$ die quadratische Form mit der Matrix \mathfrak{R} und durchläuft g alle ganzen Spalten mit m Elementen, dann konvergiert die Thetarreihe $f(z, \zeta) = \sum e^{\pi i \mathfrak{R}[g]}$. Bei simultaner Transformation von z und ζ kann Verf. die bekannte Transformationsformel der Thetareihe anwenden. Außer der so entstehenden Transformationsformel für $f(z, \zeta)$ benutzt Verf., daß die sämtlichen positiven Lösungen von $\mathfrak{H}\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$ eine $n \cdot \nu$ -dimensionale Mannigfaltigkeit H bilden, auf welcher ein Volumenelement dv erklärt ist, das gegenüber Transformationen von \mathfrak{S} in sich invariant ist [vgl. C. L. Siegel, Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 13, 209—239 (1940); dies. Zbl. 23, 7]. Ist V das Volumen des Fundamentalbereiches der Einheitengruppe von \mathfrak{S} in H , dann ist das oben benutzte Gruppenmaß $\mu(\mathfrak{S})$ mit V verknüpft durch

$$\mu(\mathfrak{S}) = \frac{q_n q_\nu}{q_m} V, \quad q_k = \prod_{j=1}^k \frac{\pi^{j/2}}{\Gamma\left(\frac{j}{2}\right)}.$$

Verf. zeigt dann, daß

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot V} (z - \zeta)^{1-n/2} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\nu/2} \{(z - \zeta)^{m/2-1} \int f(z, \zeta) dv\} = F(z),$$

wenn über den Fundamentalbereich der Einheitengruppe von \mathfrak{S} in H integriert wird. Anwendung der Transformationsformel für $f(z, \zeta)$ ergibt dann (1).

Hel Braun (Göttingen).

Geometrie.

Elementargeometrie:

Espensen, H. Chr.: Aufgaben mit Lösungen, die entweder mit dem Zirkel allein oder mit dem Lineal allein ausgeführt werden. Mat. Tidsskr. A, København 1949, 16—24 (1949) [Dänisch].

Verf. gibt hier eine Fortsetzung ähnlicher Versuche, die in Mat. Tidsskr. A, København 1929, 101 und 1941, 11 mitgeteilt worden sind. Neben einigen bekannten (z. B. F. Enriques, Fragen der Elementargeometrie, II, deutsch von H. Fleischer, Leipzig 1907, 28ff.) enthält seine Arbeit auch verschiedene neue Lösungen: Verdoppelung eines gegebenen Abstandes AB , ohne AB in den Zirkel zu nehmen; einen Kreis zu zeichnen, der die Verlängerung eines gegebenen Abstandes berührt; mehrere Lösungen der Aufgabe der Halbierung eines gegebenen Abstandes, eine Lösung der Dreiteilung eines gegebenen Abstandes und mehrere andere. Den Schluß bilden einige Lösungen von Aufgaben mit dem Parallellineal: Dreiteilung eines Abstandes AB , ohne daß die Strecke AB gezeichnet wird, Bestimmung des Mittelpunktes von AB , Bestimmung des Mittelpunktes eines gegebenen Kreises, einem gegebenen Kreis die Seiten des regelmäßigen Dreiecks, Vierecks und Sechsecks einzubeschreiben.

Zacharias (Quedlinburg).

Grimm, G.: Zur Kreisberechnung von Huygens. *Elemente Math.*, Basel 4, 78—85 (1949).

Angeregt durch die bekannten Näherungen für das Kreissegment, die Huygens 1654 (unter Verschweigung des Ausgangspunktes) durch Quadratur ein- und umbeschriebener Parabelsegmente gewonnen hatte, gibt Verf. für Schulzwecke brauchbar gemachte ähnliche Entwicklungen. Er nähert den Kreisbogen $x^2 + y^2 = 2ry$ zwischen $\pm a, b$ vermittels der leicht erweisbaren Ungleichungen

$$(1) \quad \frac{x^2}{2r} \leq y \leq \frac{bx^2}{a^2} \quad \text{bzw.} \quad (2) \quad \frac{x^2}{2r} + \frac{x^4}{8r^3} \leq y \leq \frac{x^2}{2r} + \frac{b^2 x^4}{2ra^4} \quad (|a| < r, 0 < b < r)$$

an und gibt die Segmentnäherungen

$$(1') \quad \frac{4ab}{3} < \int_{-a}^{+a} (b-y) dx < \frac{4ab}{3} \left(1 + \frac{b}{4r}\right)$$

bzw.

$$(2') \quad \frac{4ab}{3} \left[1 + \frac{b}{10r}\right] < \int_{-a}^{+a} (b-y) dx < \frac{4ab}{3} \left[1 + \frac{b}{10r} + \frac{3b^2(4r-3b)}{80r^3}\right].$$

Dies wird auf das 12-Eck angewendet und durch eine Fehlerabschätzung bei Übergang vom n -Eck zum $2n$ -Eck ergänzt. — Ich würde mich im praktischen Unterricht auf (1) beschränken; (2) besitzt trotz rechnerischer Verwendbarkeit gegenüber der binomischen Entwicklung oder den Näherungen von Gregory (1667) zu wenig allgemeines Interesse.

J. E. Hofmann (Tübingen).

Goormaghtigh, R.: On pedal and antipedal triangles. *Math. Gaz.*, London 33, 105—107 (1949).

Es ist eine bekannte Eigenschaft des Lemoineschen Punktes eines Dreiecks ABC , daß er der Schwerpunkt seines Fußpunktdreiecks bezüglich ABC ist. Verf. stellt sich die Aufgabe, einen Punkt zu finden, der der Schwerpunkt seines Antifußpunktdreiecks bezüglich ABC ist (Antifußpunktdreieck eines Punktes P bezüglich des Dreiecks ABC heißt das Dreieck LMN , bezüglich dessen ABC das Fußpunktdreieck von P ist). Mittels komplexer Koordinaten findet er die Lösung: Es gibt zwei derartige Punkte; sie sind die Brennpunkte der Steinerischen Inellipse. — Verf. gibt noch folgende Verallgemeinerung an: In einem Dreieck ABC gibt es zwei Punkte Q_1, Q_2 , die drei gegebene Zahlen λ, μ, ν als baryzentrische Koordinaten bezüglich ihrer Antifußpunktdreiecke haben; das sind die Brennpunkte des Inkegelschnitts, der zum Mittelpunkt den komplementären Punkt zu dem Punkt hat, dessen baryzentrische Koordinaten bezüglich ABC λ, μ, ν sind (M' heißt komplementär zu M , wenn der Schwerpunkt von ABC die Strecke MM' im Verhältnis 1 : 2 teilt).

Zacharias (Quedlinburg).

Algebraische Geometrie:

Sundet, Knut Lage: On the reducibility of certain systems of plane algebraic curves. *Mat. Tidsskr. B*, København 1949, 18—24 (1949).

Soit C un système linéaire complet de courbes algébriques planes, les points-base étant considérés avec leurs multiplicités effectives. Soient p le genre formel et q la dimension virtuelle de C . L'A. considère les systèmes pour lesquels on a $3p \leq 2 + q$ et détermine pour ceux-ci les conditions de réductibilité. A cet objet, il opère avec des transformations birationnelles du plan. Les théorèmes suivants sont démontrés: Si C est réductible, il contient au moins une courbe fixe transformée cremonienne d'une droite. — Pour que C soit réductible il est suffisant que dans un C_σ , transformé de C , la somme des ordres de deux points-base dépasse l'ordre des courbes du système; et, si les points-base de C sont distincts, cette condition est aussi nécessaire. — Application est faite à l'étude d'une transformation cremonienne du plan. [Remarque du rapporteur. C'est une assertion erronée que celle, faite au début de la Note, de que pour qu'une courbe algébrique plane, n'ayant d'autres

singularités que des nodes, soit réductible il faut et il suffit que son genre formel soit négatif. Contre-exemple: La quartique réductible $C^4 = C^3 + C^1$, constituée par une cubique elliptique et une droite coupant cette dernière en trois points distincts, a son genre formel nul.] *G. Ancochea (Madrid).*

Nollet, Louis: Sur la classification et la détermination des congruences linéaires de cubiques gauches. Acad. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. 8°, II. S. 23, 112 S. (1949).

Die vorliegende Untersuchung über die linearen Kongruenzen G von kubischen Raumkurven K (d. h. Systemen von ∞^2 kubischen Raumkurven, unter der Voraussetzung, daß eine einzige Kurve des Systems durch einen Punkt allgemeiner Lage hindurchgeht) ist in 5 Kapitel eingeteilt. Im 1. Kapitel werden zunächst einige allgemeine Sätze über lineare Kongruenzen rationaler Raumkurven einer beliebigen Ordnung v aufgestellt; diese Sätze werden dann im Falle $v = 3$ angewendet und tiefer verfolgt. Wichtig ist die Betrachtung der singulären Kurven γ der Kongruenz: von jedem Punkt von γ gehen ∞^1 Kurven der Kongruenz aus. Es wird ausgeschlossen, daß alle Kurven K längs γ eine Fläche berühren, und auch, daß eine Kurve K (oder ein Teil einer Kurve K) der Kurve γ unendlich benachbart sei. Mit diesen Voraussetzungen beweist Verf., daß die Kurven K der Kongruenz auf die Flächen Φ entweder eines Netzes oder eines Büschels sich verteilen; im ersten Falle sind die Kurven K die veränderlichen Schnittpunkte von zwei Flächen Φ ; und γ ist für die Flächen Φ eine einfache oder höchstens eine doppelte Kurve. Im zweiten Falle sind die Φ rationale Flächen, die γ höchstens als einfache Kurve enthalten. In beiden Fällen haben die ebenen Schnittpunkte der Flächen Φ höchstens das Geschlecht 5. Dieser Standpunkt hat, früheren Behandlungen gegenüber, den Vorteil, die gesuchten Kongruenzen in eine endliche Anzahl von Typen, genau in 12 Typen, einzuteilen. Die Typen $G^{(2i+1)}$ und $G^{(2i+2)}$ beziehen sich auf das Geschlecht i ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) der ebenen Schnittpunkte der Flächen Φ , in den beiden Fällen, wo die Φ bzw. ein Netz oder ein Büschel bilden. — In den Kapiteln 2, 3, 4 werden die Fälle $G^{(1)}$ und $G^{(2)}$, $G^{(3)}$ und $G^{(4)}$, $G^{(5)}$ und $G^{(6)}$ bzw. eingehend untersucht. Im 5. Kapitel einige Beispiele der anderen Typen. Verschiedene Typen $G^{(9)}$ und $G^{(4)}$ werden auch im 3. Kapitel gleichzeitig mit den Typen $G^{(3)}$ behandelt; die Typen $G^{(3)}$ werden aus einem Strahlenbündel durch eine kubische räumliche Cremonatransformation hergeleitet. Es ist nicht möglich, die große Menge von Typen, die erhalten werden, hier wiederzugeben. *E. G. Togliatti (Genova).*

Lesieur, Leonce: Sur la rationalité et la géométrie des intersections d'hyperquadriques. Bull. Soc. math. France 75, 113—192 (1947).

Eine Untersuchung über die Schnittmannigfaltigkeit von zwei oder mehr als zwei Quadriken in einem Raume mit beliebig vielen Dimensionen. — Im 1. Kapitel betrachtet Verf. nach Wiederholung des (geometrischen und analytischen) Beweises der Rationalität der Schnitt- V_{n-2} von zwei Quadriken im Raume S_n ($n > 3$) die birationalen Transformationen im Raume S_{n-2} , die man erhält, wenn man die V_{n-2} aus zwei verschiedenen ihrer Geraden auf S_{n-2} projiziert. Als Anwendung die gleichzeitige Reduktion von zwei quadratischen Formen auf die Quadrate von zwei kubischen Formen durch Substitution der Veränderlichen mit rationalen Funktionen. — Kapitel 2 enthält die Ausdehnung auf die Schnitt- V_{n-r} einer beliebigen Anzahl r von Quadriken im Raume S_n . Die Rationalität der V_{n-r} ist jetzt die Regel, sobald $n \geq l = \frac{1}{2}r(r+3) - 1$; Verf. studiert zunächst die eindeutigen Projektionen der V_{n-r} auf S_{n-r} (auch für $n < l$, falls sie möglich ist); und dann die birationalen Transformationen, die man aus zwei solchen Projektionen erhält; und schließlich die gleichzeitige rationale Reduktion von r quadratischen Formen auf die Quadrate von r Formen des Grades $r+1$. — Kapitel 3 enthält eine geometrische Konstruktion der Cycliden 4. und 3. Ordnung, d. h. der V_{n-2}^4 und V_{n-2}^3 , die als Projektionen der Basis- V_{n-2} eines Quadrikenbüschels des Raumes S_n auf einen S_{n-1} erhalten werden können; diese Konstruktion ist eine Ausdehnung der bekannten Konstruktion der darstellenden Geometrie für die Schnittkurve von zwei Kegeln zweiter Ordnung auf S_{n-1} . Die verschiedenen Kegel des Quadrikenbüschels liefern im S_{n-1} eine Konfiguration von $n+2$ Quadriken, die zu verschiedenen miteinander verbundenen Konstruktionen der Cyclide Anlaß geben. Es folgen verschiedene Anwendungen; z. B. auf die Schnittmannigfaltigkeit der zwei Kegel, die zwei gegebene Quadriken längs ihrer Schnitte mit einer Hyperebene berühren. — Kapitel IV wendet sich zur Betrachtung der Haupttangente der Basis- V_{n-2} eines Quadrikenbüschels. Verf. studiert die V_{n-1} , Ort dieser Haupttangente, ihre Schnitte mit den Quadriken des Büschels und die Kurven, die auf V_{n-2} von jenen Tangenten eingehüllt werden. Die Arbeit endet mit einigen Bemerkungen über die unendlichen Systeme linearer Räume und über ihre Brennmannigfaltigkeiten. *E. G. Togliatti (Genova).*

Predonzan, Arno: Sull'unirazionalità della varietà intersezione completa di più forme. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 18, 163—176 (1949).

U. Morin hat bewiesen, daß die allgemeinste algebraische Form F^n einer gegebenen Ordnung n in einem Raume S_r unirational ist, sobald r groß genug ist [Atti 2° Congr. Un. Mat. Ital. 298—320 (1942); dies. Zbl. 26, 424]. Das bedeutet,

daß sich die Koordinaten eines Punktes P der F^n als rationale, im allgemeinen aber nicht rational umkehrbare Funktionen von $r-1$ Parametern ausdrücken lassen. Dieselbe Eigenschaft gilt für eine V_s^n des Raumes S_r , die der vollständige Schnitt von $m = r-s$ allgemeinen Formen der Ordnungen n_1, n_2, \dots, n_m ist; die V_s^n ist, für beliebige Werte von n_1, n_2, \dots, n_m , unirational, sobald die Dimension r ihres Einbettungsraumes groß genug ist. Der Beweis ist ein Rekursionsbeweis; in großen Zügen verläuft er folgendermaßen. Der Ausgangspunkt ist die Existenz geeigneter linearer Räume S_k auf V_s^n , wo k von den gegebenen Werten n_1, n_2, \dots, n_m abhängt; die Existenz von S_k ist gesichert, sobald r groß genug ist; auch die untere Grenze für r hängt von n_1, n_2, \dots, n_m ab. Ein S_{k+1} durch S_k schneidet dann V_s^n in einer $V_s^{\bar{n}}$, welche auch der vollständige Schnitt von Formen ist, aber für Werte von n_1, n_2, \dots, n_m , die um 1 kleiner als die früheren sind; die Unirationalität der V_s^n wird vorausgesetzt, und daraus schließt man diejenige der $V_s^{\bar{n}}$. Die Koeffizienten der rationalen parametrischen Gleichungen von V_s^n hängen in rationaler Weise von den Koeffizienten der gegebenen m Formen ab und von den Parametern, die den oben genannten Raum S_k bestimmen. E. G. Togliatti (Genova).

Büke, Macit: Les surfaces d'ordre n de Del Pezzo dans l'espace projectif à n dimensions. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul A 14, 144—164 und türkische Zusammenfassg. 143—144 (1949).

Diese Untersuchung kann einer früheren Untersuchung desselben Verf. über Flächen F^4 des Raumes S_4 [dies. Zbl. 30, 176] zur Seite gestellt werden. Hier wird zunächst die Fläche F^5 des Raumes S_5 hinsichtlich der Konfiguration ihrer 10 Geraden untersucht. Zu diesem Zweck eignet sich am besten diejenige ebene Abbildung der Fläche F^5 , die den hyperebenen* Schnittkurven der F^5 die ebenen Kurven 5. Ordnung mit fünf Doppelpunkten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ allgemeiner Lage entsprechen läßt; die 10 Geraden der F^5 bilden sich auf die 10 Verbindungsgeraden der Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ ab. Es ist dann leicht, die verschiedenen Typen der Gruppen von 2, 3, 4, 5 jener 10 Geraden hinsichtlich ihrer Inzidenzen oder nicht-Inzidenzen zu unterscheiden und abzuzählen. Die Permutationen von $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, die die Inzidenzen der 10 Geraden invariant lassen, sind alle 5! möglichen Permutationen; besonders wichtig sind die Permutationen, die drei der Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ invariant lassen. Vom reellen Standpunkte aus gibt es drei verschiedene Arten von Flächen F^5 , je nachdem 10, 4, 2 der 10 Geraden reell sind; der Ausdruck $-v + s - f$ hat in den drei Fällen die Werte 3, 1, -1 . Im zweiten Teil der Abhandlung werden auf ähnliche Weise die Flächen F^6 des S_6 , F^7 des S_7 , die zwei F^8 des S_8 , und die F^9 des S_9 hinsichtlich ihrer Geraden und ihrer topologischen Haupteigenschaften untersucht. E. G. Togliatti (Genova).

Conforto, Fabio: Sopra le corrispondenze univoche tra i punti di una varietà quasi abeliana di Picard, rappresentate da congruenze lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 5, 369—375 (1948).

Soient: V_π la variété de Picard d'un corps K de fonctions quasi-abéliennes de π variables, $\omega_{(\pi, \pi)}$ la matrice (π lignes, π' colonnes; $\pi' < 2\pi$) des périodes de K , et u la matrice ($\pi, 1$) des variables sur V_π [cf. F. Severi: Funzioni quasi-abeliane; Pontificiae Acad. Sci. Scripta varia, n. 4 (1947)]. Pour qu'une congruence $u' = Au + \lambda \pmod{\omega}$, avec les matrices de constantes $A_{(\pi, \pi)}$ et $\lambda_{(\pi, 1)}$, représente une transformation T univoque de V_π sur elle-même il faut et il suffit que l'on ait la relation généralisée d'Hurwitz $\omega I = A\omega$, où I est une matrice (π', π') dont les éléments sont des nombres entiers. Cette condition étant remplie, l'A. démontre: a) $|A| = 0$ équivaut à ce que T soit dégénérée; b) $|A| \neq 0$ implique $|I| \neq 0$; et, si la valeur absolue de $|I|$ est égale à α , T est une correspondance $(\alpha, 1)$. — Par des

exemples, l'A. montre aussi que, contrairement à ce qui se passe dans le cas abélien: c) à une I peuvent correspondre plusieurs A ; et d) de $|A| = 0$ on ne peut pas conclure $|I| = 0$.
G. Ancochea (Madrid).

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

● Eisenhart, Luther Pfahler: An introduction to differential geometry with use of the tensor calculus. 2nd ed. Princeton: Princeton University Press 1947. X, 304 p., 21 fig.

Das Buch, in einzelnen Punkten gegenüber der 1. Aufl. von 1940 [dies. Zbl. **26**, 350] verbessert, enthält — wie schon desselben Verf. Differential geometry of curves and surfaces, 1909 — die klassische Theorie der reellen Kurven und Flächen des dreidimensionalen euklidischen Raumes; dazu kommen die Folgerungen, die sich aus der Anwendung der von Levi-Civita 1917 eingeführten infinitesimalen Parallelverschiebung ergeben. In der Form ist die Darstellung ganz modern: es wird von Anfang an der Tensorkalkül benutzt; dieser läßt sich zugleich aus dem Buch an Verhältnissen, die der Anschauung unmittelbar zugänglich sind, so erlernen, daß man ihn auf das Studium der Riemannschen Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen und der allgemeinen Relativitätstheorie anwenden kann. Kinematische Gesichtspunkte im Sinne von Darboux und Cesàro werden kaum berücksichtigt. Im einzelnen gliedert sich der Inhalt folgendermaßen: I. Kurven im Raum; Frenetsche Formeln, natürliche Gleichungen; Kurven auf Flächen; abwickelbare Flächen und Einhüllende beliebiger Flächenscharen. II. Koordinatentransformationen; Christoffelsche Symbole; kovariante Ableitung; ein Abschnitt über Systeme partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung. III. Innere Geometrie einer Fläche; 1. Grundform; Gaußsches Krümmungsmaß; Differentialparameter; geodätische Linien, geodätische Krümmung; Verbiegung, kurze Behandlung der konformen, etwas ausführlichere der geodätischen Abbildung. IV. Flächen im Raum; 2. Grundform; Normalkrümmung und geodätische Torsion, Krümmungs- und Asymptotenlinien, konjugierte Richtungen; Evolutenflächen; Flächen konstanten Krümmungsmaßes und Minimalflächen mit kurzem Blick auf die Minimalkurven. Zum Schluß ein ausführlicher Index. — Hervorzuheben sind die 21 Abbildungen, von denen mehr als die Hälfte als besonders anschaulich wirkende „Halbtonbilder“ ausgeführt sind. Löbell (München).

Löbell, Frank: Ein vektorielles Seitenstück zum Gauß-Bonnetschen Integralsatz. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München 1947, 119—128 (1949).

Bedeutet n den Einheitsvektor der Flächennormalen einer Fläche F und g das Vektorprodukt $g = n \times dn/ds$ längs des Randes R von F mit der Bogenlänge s , so wird

$$\int_R g \, ds = 2 \int_F K n \, df,$$

wenn df das skalare Flächenelement von F mißt und K das Krümmungsmaß von F_1 . Es folgt eine anschauliche kinematische Deutung der Formel von Gauß und Bonnet auf Grund der Verschiebung von Levi-Civita. W. Blaschke (Hamburg).

Stoker, J. J.: Open convex surfaces which are rigid. Studies Essays, pres. to R. Courant 407—420 (1948).

Zunächst werden Flächen $z = z(x, y)$ betrachtet, die für alle x, y erklärt sind und deren Krümmungsmaß $K > 0$ ist für alle x, y . Die Starrheit (infinitesimale Unverbiegbarkeit) einer solchen Fläche folgt unmittelbar aus einem Satz von S. Bernstein über partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Typ [Math. Z. **26**, 551—558 (1927)]. Zweitens werden Drehflächen $z = z(r)$; $0 \leq a \leq r < b$, betrachtet mit $z_{rr} > 0$. Unter gewissen Beschränkungen wird gezeigt, daß auch eine solche Fläche starr ist. Auch bei diesem Nachweis spielt der Satz Bernsteins eine Rolle. W. Blaschke (Hamburg).

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Haimovici, Adolf: Sur la géométrie d'un groupe généralisant celui des transformations parallèles. Disqu. math. physic., București **7**, 121—137 (1948).

Verf. untersucht in einem dreidimensionalen Raum ein- bzw. zweiparametrische Scharen von Flächenelementen bei Zugrundelegung derjenigen Affingruppe, die aus unimodularen Affinitäten und Translationen besteht. Sind x^i die Koordinaten des

Mittelpunktes des Flächenelementes und wird seine Ebene durch $\xi_i x^i = 1$ bestimmt, dann sind x^i, ξ_i die Koordinaten des Flächenelementes. In jedem Flächenelement wird noch ein Vektor v^i angebracht. Für eine einparametrische Schar von Flächenelementen wird

$$(a) \quad x^i = x^i(\sigma), \quad \xi_i = \xi_i(\sigma), \quad v^i = v^i(\sigma),$$

wobei der Parameter σ die Affinbogenlänge des „sphärischen Bildes γ'' von v^i ist. Verf. gibt für diese einparametrische Schar ein vollständiges Invariantensystem an, das außer den Affininvarianten σ, k_1 und k_2 (k_1 und k_2 sind die beiden Affinkrümmungen von γ) noch aus sechs weiteren aus (a) herleitbaren Invarianten besteht. Für zweiparametrische Scharen

$$(b) \quad x^i = x^i(u^1, u^2), \quad (c) \quad \xi_i = \xi_i(u^1, u^2), \quad (d) \quad v^i = v^i(u^1, u^2)$$

hängt ein vollständiges Invariantensystem wieder wesentlich von den Affininvarianten des sphärischen Bildes von (d) ab, daneben treten aber noch weitere Invarianten auf, die durch Hinzunahme von (b) und (c) gewonnen werden. Im Sonderfalle, in welchem die Flächenelemente aus Tangentenebenen einer Fläche bestehen und die Gruppe dann aus den Abbildungen dieser Fläche durch parallele Tangentenebenen und unimodulare Affinitäten bestimmt ist, erhält Verf. folgendes Resultat: Eine Fläche ist bis auf Abbildungen durch parallele Tangentenebenen bestimmt, wenn man für eine derselben die quadratische und kubische Differentialform und ihr Petersonsches Kurvennetz kennt.

O. Varga (Debrecen).

Hsiung, Chuan-Chih: Invariants of intersection of certain pairs of space curves. Bull. Amer. math. Soc. 55, 623—628 (1949).

Für jedes Paar von Raumkurven C, \bar{C} , die sich in einem Punkt P schneiden, wird eine projektive Invariante bestimmt, die von den Umgebungen der zwei Kurven bis zur dritten Ordnung einschl. abhängt. Haben C, \bar{C} in P verschiedene Tangenten t, \bar{t} und Schmiegeebenen $\tau, \bar{\tau}$, deren Schnittgerade p weder mit t noch mit \bar{t} zusammenfällt, so errechnet man aus der Potenzreihendarstellung von C, \bar{C} in dem Achsen-system t, \bar{t}, p mit Ursprung P

$$\text{für } C: y = rx^3 + \dots, \quad z = ax^2 + \dots,$$

$$\text{für } \bar{C}: x = qy^3 + \dots, \quad z = \alpha y^2 + \dots,$$

daß $I = r\Delta^2/q\alpha^2$ projektiv invariant ist; sind R, \bar{R}, T, \bar{T} die Radien der Krümmung und Windung von C, \bar{C} , so ist $I = -RT/\bar{R}\bar{T}$. Fällt aber p mit t z. B. zusammen,

so ist $J = \left(\frac{2}{3}\right)^6 \frac{R^2 \bar{R}^4}{T^5 \bar{T}}$ eine Projektivinvariante der Nachbarschaft von P auf C, \bar{C}

inschl. zur 3. Ordnung. Fallen schließlich beide Schmiegeebenen zusammen, so ist $K = -T/\bar{T}$ eine entsprechende projektive Invariante. Die Invarianten I, J und K werden projektiv gekennzeichnet.

Süss (Freiburg i. B.).

Finikoff, S.: Couple de courbes stratifiables. Rev. Univ. nac. Tucumán, A 3, 289—312 (1948).

Ein System E_3 von ∞^3 Flächenelementen (P, π) , welches jedem Punkt P eine durch P gehende Ebene π zuordnet, heißt stratifizierbar, wenn es eine Schar von ∞^1 Flächen gibt, die jedes Flächenelement π im Zentrum P berühren. Sind zwei umkehrbar eindeutig zugeordnete Geraden-Kongruenzen G, G' gegeben, so gelangt man sofort zu zwei Systemen E_3, E'_3 , indem man die Ebenen durch die Punkte einer Geraden von G betrachtet, die durch die zugeordnete Gerade von G' gehen. Sind beide Systeme E_3, E'_3 stratifizierbar, so nennt man G, G' stratifizierbar. — Verf. konstruiert zu zwei umkehrbar eindeutig zugeordneten Raumkurven C, C' zwei Systeme E_3, E'_3 : Es seien M, M' zwei entsprechende Punkte von C, C' . Dann gibt es im allgemeinen ∞^1 lineare Komplexe K_α , die C und C' in M, M' in erster Ordnung berühren. Das zu K_α gehörende Nullsystem erzeugt eine Korrelation in den Schmiegeebenen σ, σ' von C, C' , so daß jedem Punkt P von σ eine Gerade p' in σ' entspricht. Durch P geht die Ebene $\pi = (Pp')$. Zum Punkt P' von σ' gehört die Ebene $\pi' = (P'p)$. Auf diese Weise gibt es zu C, C' je nach der Wahl der Berührungskomplexe K_α zwei Systeme E_3, E'_3 . — Besitzen C, C' in jedem Punkte

paar M, M' einen linearen Berührungskomplex K , der in zweiter Ordnung berührt, also drei konsekutive Tangenten von C und C' enthält, so gibt es unter den linearen Tangentialkomplexen einen Komplex K^* , der involutorisch zu K ist. Die zu K^* gehörenden Systeme E_3, E'_3 sind stratifizierbar. Da dies die einzigen stratifizierbaren Systeme sind, nennt Verf. Kurvenpaare mit gemeinsamem Berührungskomplex K stratifizierbar. — Die zweimal ∞^1 stratifizierenden Flächen Σ und Σ' sind windschiefe Flächen, die durch C bzw. C' gehen. Die Erzeugenden der Schar Σ bilden im Punkt M ein Strahlenbündel, das in σ liegt. Die zweimal ∞^1 Flächen Σ, Σ' kann man durch ∞^2 Strahlensysteme verbinden, die eine Fläche Σ und eine Fläche Σ' als Brennpflächen besitzen. Alle diese Strahlensysteme sind W -Systeme. — Die ∞^1 Flächen Σ berühren sich längs C , dabei ist C gemeinsame Asymptotenlinie (analog C' für Σ'). Jeder Fläche Σ läßt sich eine konjugierte Fläche Σ' derart zuordnen, daß die Schnittkurve C_n von Σ, Σ' gemeinsame Asymptotenlinie ist. Die Kurven C_n haben in entsprechenden Punkten K^* als gemeinsamen oskulierenden Komplex (2-ter Ordnung). Daher sind irgend zwei Kurven C_1, C_2 der Schar C_n stratifizierbar. — Dadurch gelangt Verf. zu einem geschlossenen System stratifizierbarer Kurven, dessen weitere Untersuchung zu schönen Ergebnissen über ein Paar stratifizierbarer Kongruenzen führt.

W. Haack (Berlin).

Anglade, E.: Sur les surfaces dont la suite de Laplace adjointe se termine suivant les cas de Laplace et de Goursat. Bull. Soc. math. France 75, 43—48 (1947).

Eine Fläche S des dreidimensionalen projektiven Raumes E_3 sei mit ihren Asymptotenlinien u, v gegeben. Bildet man die Geraden des E_3 auf die Kleinsche Hyperquadrík Q des E_5 ab, so entsprechen den Asymptotenlinien von S die Geraden U, V . Diese erzeugen bekanntlich eine Laplacesche Folge $\mathfrak{L}: \dots U_2, U_1, U, V, V_1, V_2 \dots$ im E_5 . Verf. untersucht den Fall, daß diese Folge mit U_n im Sinne von Laplace abbricht. Da \mathfrak{L} nach Godeaux autopolar ist [d. h. die Hyper-Polarebene von U_n bezüglich Q ist $(V_{n-2} V_{n-1} V_n V_{n+1} V_{n+2})$], endet die Folge auf der anderen Seite im Sinne von Goursat mit V_{n+2} . Die Gerade $(V_{n+2} V_{n+1})$ im E_5 schneidet Q in zwei Punkten G, G' , denen im E_3 die Geraden g, g' entsprechen. Ebenso führt der Schnitt der Geraden $(U_n dU_n/dv)$ mit Q zu zwei weiteren Geraden f, \bar{f} . Somit werden jeder Asymptotenlinie $v = \text{const.}$ von S vier Geraden $g, \bar{g}; f, \bar{f}$ zugeordnet, die nur von dem Parameter v abhängen. Verf. widmet sich hauptsächlich der Untersuchung dieser Geradenscharen im Zusammenhang mit der Folge \mathfrak{L} . Von den Ergebnissen sei folgendes erwähnt: Ändert sich v , so beschreiben g, \bar{g} die Flächen $(g), (\bar{g})$, die Verf. als Brennflächen einer Kongruenz W_g ansieht. Die linearen Berührungskongruenzen von W_g gehören dem Komplex U_n an. Ferner wird durch W_g jedem Punkt N von (g) ein Punkt N' von (\bar{g}) zugeordnet. Dann ist die Polarebene von N bezüglich des entsprechenden V_{n+2} die Tangentenebene von (\bar{g}) in N' .

Haack (Berlin).

Rozet, O.: Sur les complexes satellites des congruences de droites. Bull. Soc. Sci. Liège 17, 189—193 (1948).

Die nicht-abwickelbare Fläche x sei auf ihre Asymptotenlinien u, v bezogen. (J) sei ein Strahlensystem, das x zur Brennfläche hat; ferner sei \bar{x} die zweite Brennfläche von (J) . Durch Abbildung der Geraden des R_3 auf die Kleinsche Hyperquadrík des R_5 gehen die Tangenten der Parameterlinien u, v der Flächen x und \bar{x} über in die Punkte U, V bzw. U^*, V^* des R_5 . Die Geraden UU^* und VV^* des R_5 schneiden sich im Punkt $P_{\bar{x}}$, der das Kleinsche Bild des Begleitkomplexes von Welsch (complexe satellite) ist. Ist (J) ein W -System, so beschreibt $P_{\bar{x}}$ eine Kurve; ist (J) nicht W -System und ist \bar{x} eine (nicht-entartete) Fläche, so beschreibt $P_{\bar{x}}$ eine Fläche im R_5 , wenn u, v variieren.

Haack (Berlin).

Simonart, Fernand et Félix Alardin: Sur une classe de congruences R associées aux surfaces harmoniques. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 602—613 (1949).

Im rechtwinkligen Koordinatensystem x, y, z seien zwei konjugierte harmonische Flächen $z = H(x, y), z' = H'(x, y)$ gegeben. Legt man durch jeden Punkt x, y der Basisebene π ($z = 0$) die Parallele p zur Schnittgeraden der Tangentenebenen in den zugeordneten Punkten $H(x, y), H'(x, y)$, so erzeugen die Geraden p ein Ribaucoursches Strahlensystem, dessen erzeugende Fläche ein Rotationspara-

boloid ist. Diese R -Systeme lassen sich durch konforme Abbildungen der Basis-ebene π kennzeichnen. Zieht man durch einen Punkt Q außerhalb π die Parallelen zu den Strahlen p und bestimmt den Schnittpunkt P' mit π , so ist die Abbildung, die die Fußpunkte P von p in die Punkte P' überführt, direkt konform. *Haack.*

Havlíček, Karel: *Sur les surfaces enveloppes de sphères.* Časopis Mat. Fysiky, Praha **74**, 21—39 und tschechische Zusammenfassung 39—40 (1949).

Es werden in invarianter Form die Bedingungen dafür hergeleitet, daß eine Fläche Einhüllende einer eingliedrigen Schar von Kugeln ist. Vermöge von S. Lies Kugel-Geraden-Abbildung ergeben sich Beziehungen zur Aufgabe: Eine Fläche, die eine eingliedrige Geradenschar trägt, zu kennzeichnen. *W. Blaschke* (Hamburg).

Backes, F.: *Sur une classe de transformations de Darboux.* Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. **35**, 50—59 (1949).

Verf. zeigt, daß zwischen den Punkten einer Fläche von konstanter Krümmung und den Kugeln eines R -Kugelsystems eine umkehrbar eindeutige Beziehung hergestellt werden kann, wenn die Kugeln des Systems eine feste Kugel unter festem Winkel schneiden, also einem linearen Kugelkomplex angehören, und beide Hüllflächenmängel der Kugelkongruenz winkeltreu aufeinander bezogene Isothermflächen sind. — Unter Verwendung des adäquaten Instrumentes der pentasphärischen Koordinaten in Verbindung mit der Methode der „pentaspère mobile“ von A. Demoulin [C. r. Acad. Sci., Paris **140**, 1526 (1905); Mém. Soc. Sci. Liège, III. S. **11**, 1^{re} p. (1921)] wird zu den Relationen für ein R -Kugelsystem (die Krümmungslinien der Hüllflächenmängel entsprechen sich!) die Bedingung der Winkeltreue dieser Abbildung sowie die Forderung hinzugenommen, daß die Kugeln des Systems eine feste Kugel unter konstantem Winkel schneiden. Eine Vereinfachung der Parameter — das ds^2 der Hüllflächen wird auf die isotherme Form gebracht — führt zur Differentialgleichung $\partial^2 \Omega / \partial u^2 - \partial^2 \Omega / \partial v^2 = A^2 \sin \Omega \cos \Omega$, die andererseits vom halben Winkel der Asymptotenlinien der pseudosphärischen Flächen konstante Krümmung $-A^2$ erfüllt wird, wenn diese auf das Netz ihrer Krümmungslinien bezogen werden. Schließlich betrachtet Verf. noch eine mit obigem Kugelsystem verbundene Kugel, die eine Kongruenz von konstanter Krümmung durchläuft. [Krümmung einer Kongruenz vgl. A. Demoulin, Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. **19**, 877—880 (1933); **21**, 770—772 (1935); C. r. Acad. Sci., Paris **202**, 1234—1237 (1936); dies. Zbl. **7**, 365; **12**, 278; **13**, 364; sowie Vincensini, C. r. Acad. Sci., Paris **201**, 1004—1005 (1935); dies. Zbl. **12**, 372.] *H. R. Müller* (Graz).

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Kosambi, D. D.: *Lie rings in path space.* Proc. nat. Acad. Sci. USA **35**, 389—394 (1949).

Verf. geht aus von dem durch

$$(1) \quad \ddot{x}^i + \alpha^i(x, \dot{x}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \dot{x}^i = dx^i/dt$$

bestimmten Raum der Bahnen. Bei Benützung der Abkürzungen:

$$(2a) \quad \varphi_{,r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^r}; \quad \varphi_{;k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}; \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi_{,r} \dot{x}^r - \varphi_{;r} \alpha^r$$

sind die zu der infinitesimalen Abänderung $\bar{x}^i = x^i + u^i \delta t$ gehörigen Variationsgleichungen von (1) durch

$$(2) \quad \Theta x^i = \ddot{u}^i + \alpha_{,r}^i \dot{u}^r + \alpha_{;r}^i u^r = 0$$

bestimmt. Verf. ordnet jeder Lösung u^i von (2) den Operator

$$(3) \quad X \equiv u^r \frac{\partial}{\partial x^r} + \dot{u}^r \frac{\partial}{\partial \dot{x}^r}$$

einer einparametrischen Lieschen Gruppe des $2n + 1$ dimensionalen Raumes V_{2n+1}

mit Koordinaten (x, \dot{x}, t) zu. Es wird nun untersucht, wann die zu verschiedenen Lösungen von (1) gehörigen Operatoren eine Liesche Gruppe bilden und über welchem Bereich. Dazu genügt es, zu zeigen, daß der Klammerausdruck von zwei Operatoren des Typus (3) zu einem Operator desselben Typus führt, und ferner, daß für drei solche Operatoren die Jacobische Identität gilt. Mittels des Hilfssatzes, daß die Lösungen von (2) gerade diejenigen Funktionen sind, deren zugeordnete Operatoren (3) mit der Operation d/dt vertauschbar sind, erhält Verf. folgendes Resultat: Die Operatoren, die zu den Lösungen (2) gehören, bilden einen Lieschen Ring über der Menge derjenigen Funktionen, die längs der Bahnkurven konstant sind, und eine Liesche Algebra über dem Körper der reellen Zahlen. Verf. untersucht ferner diejenige Untergruppe, die den Urraum der x^i und die Bahnen invariant läßt, und findet, daß eine solche Gruppe höchstens $n(n+1)$ -gliedrig sein kann. Die Untersuchungen werden weiter auch auf Systeme von Differentialgleichungen höherer Ordnung und partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung ausgedehnt. Schließlich beweist Verf. für den Fall, daß eine Metrik in dem Raum der Bahnen gegeben ist, d. h., daß (1) die Extremalen eines regulären Variationsproblems darstellt, daß eine Metrik wieder in eine Metrik durch diejenige Gruppe übergeführt wird, die den Urraum und die Bahnen invariant läßt.

O. Varga (Debrecen).

Bergen, F. van: Transformation de la forme quadratique fondamentale de l'Univers de de Sitter. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 34, 975—977 (1948).

Verf. zeigt, daß die 4-dimensionale de Sittersche Welt ein Cayley-Kleinscher Raum ist. Es werden entsprechende homogene Koordinaten eingeführt und gezeigt, daß nach Auszeichnung eines absoluten Gebildes die auf sie bezügliche Cayleysche Maßbestimmung dasselbe Bogenelement besitzt wie die de Sittersche Welt. Ref. bemerkt, daß dieses Resultat auch in einer neuerdings erschienenen Arbeit von A. Dinghas [dies. Zbl. 31, 78] enthalten ist.

O. Varga (Debrecen).

Varga, Ottó: Bemerkung zur Arbeit des Herrn A. Dinghas „Zur Metrik nicht-euklidischer Räume“. Math. Nachr., Berlin 2, 386—388 (1949).

Die vom Ref. angegebene Metrik (dies. Zbl. 31, 79) eines Raumes konstanter Krümmung K

$$ds^2 = \sum_1^{n-1} dx_k^2 + K \frac{\left(\sum_1^{n-1} x_k dx_k \right)^2}{1 - K \varrho^2} + (1 - K \varrho^2) dx_n^2 \quad \left(\varrho^2 = \sum_1^{n-1} x_k^2 \right)$$

wird für $K > 0$ geometrisch gedeutet.

Dinghas (Berlin).

Topologie:

Esenin-Vol'pin, A. S.: Über die Abhängigkeit zwischen lokalem und integralem Gewicht in dyadischen Bikompakten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 68, 441—444 (1949) [Russisch].

Ein dyadisches Bikompaktum ist stetiges Bild einer Menge D_τ , die topologisches Produkt von τ zweipunktigen Bikompakta ist; τ kann irgendeine Mächtigkeit sein. Die Punkte von D_τ können durch die Angabe von τ Koordinaten, von denen jede nur die Werte 0 oder 1 annehmen darf, eineindeutig bestimmt werden. D_τ wird topologischer Raum durch die Definition von Umgebungen: $U_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}^{x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_s}}$ enthält diejenigen Punkte von D_τ , deren α_i -Koordinate den Wert x_{α_i} ($1 \leq i \leq s$) besitzt. Das lokale Gewicht des Raumes im Punkte a ist die kleinste Ordnungszahl λ_a , derart, daß eine Familie von λ_a Umgebungen des Punktes a existiert mit der Eigenschaft, daß jede Umgebung von a eine Umgebung dieser Familie enthält. Das integrale Gewicht des Raumes ist die kleinste Ordnungszahl τ , derart, daß eine Familie von τ Umgebungen existiert mit der Eigenschaft, daß jede nichtleere offene Menge als Summe von Umgebungen aus dieser Familie dargestellt werden kann.

Charakter der Ordnungszahl μ werde die kleinste Ordnungszahl $\chi(\mu)$ genannt, derart, daß μ Summe von $\chi(\mu)$ Zahlen kleiner als μ ist. Es werden die beiden folgenden Sätze bewiesen: 1. Das integrale Gewicht des dyadischen Bikompaktums, welches aus unendlich vielen Punkten besteht, ist gleich der oberen Grenze der Werte des lokalen Gewichtes in seinen Punkten. 2. Wenn das integrale Gewicht des dyadischen Bikompaktums einen nichtabzählbaren Charakter besitzt, so gibt es in diesem Bikompaktum Punkte, deren lokales Gewicht dem integralen Gewicht des Raumes gleich ist.

Thimm (Bonn).

Lokucievskij, O. V.: Über die Dimension der Bikompakta. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 217—219 (1949) [Russisch].

Es sei $\dim R$ die Dimension des Raumes R , definiert durch die Ordnung einer hinreichend feinen abgeschlossenen Überdeckung von R , und $\text{ind } R$ bezeichne die Menger-Uryschnsche Dimension, gewonnen durch Induktion. Während $\dim R$ und $\text{ind } R$ für separable metrische Räume zusammenfallen, können sie für allgemeinere Räume verschieden sein. Hierfür wird ein Beispiel eines bikompakten Raumes angegeben. Außerdem werden zwei allgemeine Sätze über die Dimension der Bikompakta bewiesen: Es sei S ein beliebiges Bikompaktum vom Gewicht τ . Dann gibt es ein dyadisches Bikompaktum R (vgl. vorsteh. Referat) mit demselben Gewicht τ , welches S enthält. R ist die dyadische Umhüllung von S . Es gelten die Sätze: 1. Wenn $\dim S < \infty$ ist, dann gilt: $\dim R = \dim S$. 2. Wenn $\text{ind } S < \infty$ ist, dann gilt $\text{ind } R \leq \text{ind } S + 1$.

Thimm (Bonn).

Ramanathan, A.: On the strong extension of a T_1 -space into a T_1 -bicomcompact space. J. Indian math. Soc., n. S. 13, 25—30 (1949).

Diese Arbeit führt die Untersuchungen über lokale Bikompaktheit bei Alexandroff-Hopf, Topologie I (Berlin 1935; dies. Zbl. 13, 79), Seite 93, weiter. Ein bikompakter Raum (R, f) wird „minimal-bikompakt“ genannt, wenn R bei jeder schwächeren Topologie als f nicht mehr bikompakt ist. Ein bikompakter Raum heißt „lokal minimal-bikompakt im Punkte P “, wenn die Topologie des Raumes in P nicht abgeschwächt werden kann, ohne daß der Raum aufhört, bikompakt zu sein. Der bikompakte Raum $R + \xi$, der durch die starke Erweiterung des T_1 -Raumes R gewonnen wird, ist lokal minimal-bikompakt in ξ . — Dann wird die Bikompaktheit mit der Regularität in Beziehung gebracht: Ein bikompakter Raum ist lokal minimal-bikompakt in jedem regulären Punkte. Bei der starken Erweiterung des T_1 -Raumes R in den bikompakten Raum $R + \xi$ ist $R + \xi$ dann und nur dann regulär in ξ , wenn R lokal bikompakt ist. Zum Schluß wird ein Beispiel eines irregulären minimal-bikompakten Raumes angegeben.

Thimm (Bonn).

Areškin, G. Ja.: Strukturen lokal bikompakter T_1 - und T_2 -Räume. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 13, 213—220 (1949) [Russisch].

In der folgenden Weise wird eine axiomatische Beschreibung der algebraischen Struktur der lokal bikompakten T_1 - und T_2 -Räume gegeben: $\{F\}$ sei eine Basis abgeschlossener Mengen des lokal bikompakten T_1 -Raumes R und $\{P\}$ das System aller bikompakten Mengen der Basis $\{F\}$. Die Basis $\{F\}$ kann so gewählt werden, daß es für jeden Punkt x aus R eine Umgebung $U_0(x)$ gibt, derart, daß $U_0(x) = P_0 \in \{P\}$ ist. Jede algebraische Struktur S mit einer Teilstruktur $S' \subset S$ wird Struktur eines lokal bikompakten T_1 -Raumes genannt, wenn S isomorph (bezüglich der mengentheoretischen Operationen der Vereinigung \vee und des Durchschnittes \wedge) der Basis $\{F\}$ eines lokal bikompakten T_1 -Raumes ist und wenn S' hierbei $\{P\}$ entspricht. Notwendig und hinreichend dafür, daß S (mit S') Struktur eines lokal bikompakten T_1 -Raumes ist, sind die folgenden algebraischen Bedingungen: I. In S sind die Operationen Vereinigung \vee und Durchschnitt \wedge mit den bekannten algebraischen Eigenschaften definiert. In S gibt es ein Null- und ein Einheits-element. II. $a' \wedge a \in S'$, wenn $a' \in S'$ und $a \in S$ ist. III. Für jedes $a' \in S'$, $a' \neq 0$, gibt es

$b \in S$ und $b' \in S'$, so daß $a' \leq b'$, $a' \wedge b = 0$ und $b \vee b' = 1$ ist. IV. Wenn $a, b \in S$ und $b < a$ ist, so gibt es $c' \in S'$ derart, daß $0 \neq c' \leq a$ und $b \wedge c' = 0$ ist. — Damit S (mit S') Struktur eines lokal bikompakten T_2 -Raumes ist, sind notwendig und hinreichend die obigen Bedingungen I bis IV und: V. Wenn $a' \neq 0$, $b' \neq 0$; $a' \wedge b' = 0$; $a', b' \in S'$ sind, so gibt es $a, b \in S$ derart, daß: $a \wedge b' = 0$, $a' \wedge b = 0$ und $a \vee b = 1$ sind. Für bikompakte T_1 - bzw. T_2 -Räume vereinfachen sich diese Bedingungen wesentlich. — Für die Homöomorphie zweier lokal bikompakter T_1 -Räume ist notwendig und hinreichend, daß sie isomorphe Strukturen besitzen. Thimm (Bonn).

Areškin, G. Ja.: Kompakta und ihre Strukturen. Mat. Sbornik, n. S. 25, 151—154 (1949) [Russisch].

Vgl. das vorsteh. Referat. — Die Struktur eines Kompaktums X ist jede algebraische Struktur, welche isomorph ist der Struktur $\{F\}$ der abgeschlossenen Mengen von X , welche als Ergänzungsmengen der (offenen) Mengen einer Basis $\{U\}$ des Kompaktums X gewonnen werden. — Die abzählbare Struktur $S = \{a, b, c, \dots\}$ ist dann und nur dann die Struktur eines Kompaktums X , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: 1. S enthält Null- und Einheitsselement. 2. In S sind die Operationen Vereinigung \vee und Durchschnitt \wedge definiert. 3. Wenn $0 \neq b < a$, dann gibt es ein Element c derart, daß $0 \neq c < a$ und $b \wedge c = 0$ ist. 4. Wenn $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $a \wedge b = 0$ ist, gibt es solche Elemente a_1 und b_1 , daß $a_1 \geq a$, $b_1 \geq b$, $a_1 \wedge b = b_1 \wedge a = 0$ und $a_1 \vee b_1 = 1$ gelten. Thimm (Bonn).

Lokuciewskij, O.: Über offene Abbildungen ebener Kompakta. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 64, 625—628 (1949) [Russisch].

Die stetige Abbildung f des topologischen Raumes X auf den topologischen Raum Y heißt „offen“, wenn das Bild jeder in X offenen Menge eine in Y offene Menge ist. Wir nennen die Abbildung „quasimonoton“, wenn sie folgende Bedingung erfüllt: Es sei C ein Kontinuum, das zu Y gehört und K eine Komponente des Urbildes von C . Dann gilt: $f(K) = C$. Von Hopf stammt der Satz: Die offene Abbildung eines Kompaktums ist quasimonoton. Um über die Möglichkeit der offenen Abbildung zweier Kompakta aufeinander zu entscheiden, genügt es daher, quasimonotone Abbildungen in Betracht zu ziehen. Diesen Weg geht Verf. in seiner sehr interessanten Note. „Dreibein“ T' werde ein Kontinuum genannt, das homöomorph der Vereinigungsmenge der beiden Strecken (in der x, y -Ebene): $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, $y = 0$ und $x = 0$, $0 \leq y \leq 1$ ist. Im 3-dimensionalen x, y, z -Raum sei $\omega T'$ folgendes Kompaktum: In jeder Ebene $z = 1/n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) und auch in der Ebene $z = 0$ bestehe $\omega T'$ aus einem Dreibein der beschriebenen Form. Dann werden die folgenden Sätze bewiesen: 1. Wenn das ebene Kompaktum X quasimonoton auf ein Dreibein T' abgebildet werden kann, so besitzt X nur endlich viele Komponenten. 2. Kein ebenes Kompaktum kann quasimonoton auf ein Kompaktum Y abgebildet werden, welches als Teilmenge das topologische Bild des Kompaktums $\omega T'$ enthält. 3. Wenn eine Komponente des Kompaktums X homöomorph einer ebenen Menge ist, so kann X nicht quasimonoton auf ein Kontinuum abgebildet werden, welches als Teilmenge das topologische Bild des Kompaktums $\omega T'$ enthält. — Hieraus folgt insbesondere die Unmöglichkeit quasimonotoner, also auch offener Abbildungen ebener Kompakta auf q -dimensionale Würfel, wenn $q > 2$ ist. Thimm (Bonn).

Fox, R. H.: On a problem of S. Ulam concerning Cartesian products. Fundam. Math., Warszawa 34, 278—287 (1947).

S. Ulam hat [Fundam. Math., Warszawa 20, 285 (1933)]; das folgende Problem gestellt: Es seien A und B zwei topologische Räume und $A^2 = A \times A$ und $B^2 = B \times B$ ihre Quadrate (d. h. das Cartesische Produkt von A bzw. B mit sich selbst). Folgt dann aus der Homöomorphie von A^2 und B^2 diejenige von A und B ? — Es wird an einem Beispiel gezeigt, daß das nicht der Fall ist. Es sei $M(p, q)$ die dreidimensionale berandete Mannigfaltigkeit, die aus dem Linsenraum

$L(q, p)$ durch Fortnahme der inneren Punkte einer 3-Zelle entsteht, und E eine eindimensionale Zelle. Man setze $A = M(p, q_1) \times E$, $B = M(p, q_2) \times E$, wo q_1 quadratischer Rest, q_2 quadratischer Nichtrest modulo p ist. Von den 4-dimensionalen berandeten Mannigfaltigkeiten A und B wird gezeigt, daß $A \neq B$, aber $A^2 = B^2$ ist. — Dagegen ist die Ulamsche Frage zu bejahen für Mannigfaltigkeiten, deren Dimension kleiner als 3 ist. *H. Seifert* (Heidelberg).

Hopf, H.: Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten. *Studies Essays*, pres. to R. Courant, 167—185 (1948).

Eine komplexe Mannigfaltigkeit M^n ist eine Mannigfaltigkeit gerader Dimension $n = 2m$, wenn zu jedem Punkt p eine Umgebung gehört, die durch eine topologische Abbildung derart auf ein Gebiet des Raumes der komplexen Veränderlichen z_1, \dots, z_m abgebildet ist, daß $\varphi_p \varphi_q^{-1}$, soweit erklärt, durch analytische Funktionen von z_1, \dots, z_m vermittelt wird. Jede komplexe Mannigfaltigkeit ist eine „ J -Mannigfaltigkeit“, d. h. sie ist (reell-)differenzierbar, und es gibt eine stetig vom Punkt p abhängende stetige Abbildung der Richtungssphäre S_p^{n-1} in p auf sich, die keinen Punkt von S_p^{n-1} in sich oder den Gegenpunkt verwandelt. Diese Abbildung bestimmt nach Festlegung einer Orientierung ein Element α der $(n-1)$ -ten Homotopiegruppe G_{n-1} der Richtungsmannigfaltigkeit von S^{n-1} ; es hängt nicht von p ab. Andererseits kann einem nur in einem Punkt singulären Feld von geordneten Paaren sonst überall linear unabhängiger Richtungen ein Element von G_{n-1} , sein Index, zugeordnet werden. Die Ergebnisse der Arbeit folgen aus dem Satz, daß dieser Index $C \cdot \alpha$ ist, wenn C die Eulersche Charakteristik von M^n ist. Die Gruppe G_{n-1} ist bekannt; im Falle $n = 4$ und $n = 8$ (auf Grund der Parallelisierbarkeit von S^{n-1}) auch, welches α bei einer komplexen und bei einer gespiegelt-komplexen Mannigfaltigkeit auftritt. Daraus ergibt sich, daß S^4 und S^8 keine J -, also auch keine komplexen Mannigfaltigkeiten sind. Ebenso wenig sind es die aus S^4 durch Anhängen von $p \neq 1$ Henkeln entstehenden Mannigfaltigkeiten; gleichfalls nicht das Spiegelbild der projektiven komplexen Ebene. Weitere Bedingungen werden aufgestellt, die von allen komplexen Mannigfaltigkeiten erfüllt werden; doch ist bei diesen Bedingungen noch unbekannt, ob sie nicht bei allen Mannigfaltigkeiten erfüllt und daher gegenstandslos sind. Die Beweise sind skizziert. *H. Kneser* (Tübingen).

Bassi, Achille: Sopra l'indipendenza di alcuni invarianti topologici. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur.*, VIII. S. 5, 235—238 (1948).

Der Verf. hat früher [*Ann. mat. pura appl.*, Bologna, IV. S. 16, 275—297 (1937); dies. Zbl. 18, 240] die folgenden Invarianten einer geschlossenen n -Mannigfaltigkeit V eingeführt: μ_0 ist die kleinste Zahl von n -Zellen, die bei einer Darstellung von V als Zellenkomplex auftreten kann; μ_1 und μ_2 sind ebenso erklärt, nur werden Homologiezellen bzw. noch allgemeinere Komplexe statt der eigentlichen n -Zellen zugelassen. Er weist jetzt darauf hin, daß diese Invarianten nicht schon durch die Homologiegruppen von V bestimmt sind: ist V das Produkt dreier Kreise, W die Summe dreier Produkte von Kreis und Kugel (die Summe bildet man durch Fortnehmen einer n -Zelle und Anheften längs der entstehenden Ränder), so stimmen V und W in den Homologiegruppen überein; die Invarianten μ_i haben aber bei V den Wert 4, bei W den Wert 3. Allerdings unterscheiden sich V und W auch in der Struktur des Homologieringes und entgegen einer Angabe des Verf. — in der Fundamental- (ersten Homotopie-)gruppe. Die Poincaréschen Räume zeigen, daß μ_0 auch durch den vollen Homologiering nicht bestimmt ist; hier ist $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Mit den Mitteln der genannten früheren Arbeit läßt sich für μ_1 und μ_2 die untere Schranke $\delta + 1$ nachweisen, wenn δ die Höchstzahl höchstens $(n-1)$ -dimensionaler Zyklen mit von Null verschiedenem (Schnitt-)Produkt ist. Die Frage, ob μ_0 durch die Homotopiegruppen bestimmt ist, schließt das Poincarésche Problem der Kennzeichnung der 3-Sphäre ein. *H. Kneser* (Tübingen).

Eckmann, B., H. Samelson and G. W. Whitehead: On fibering spheres by toruses. Bull. Amer. math. Soc. 55, 433—438 (1949).

Es werden folgende Sätze bewiesen: 1. Eine Faserung der n -Sphäre mit einem Polyeder als Basisraum und dem s -dimensionalen Torus als Faser existiert dann und nur dann, wenn n ungerade und $s = 1$ ist. 2. Der euklidische n -dimensionale Raum gestattet keine Faserung, deren Faser ein s -dimensionaler Torus und deren Basisraum ein Polyeder ist. — Diese Sätze stellen die Antwort auf eine Frage von H. Hopf dar. Satz 1 (und vermutlich auch Satz 2) gilt auch dann noch, wenn beliebige separable metrische Räume als Basisräume zugelassen werden.

H. Seifert (Heidelberg).

Zykov, A. A.: Über einige Eigenschaften der Streckenkomplexe. Mat. Sbornik, n. S. 24, 163—188 (1949) [Russisch].

1. In der Menge der endlichen Streckenkomplexe werden Summe und Produkt definiert: $L_1 + L_2$ besteht aus denjenigen Ecken und Strecken, die zu L_1 oder zu L_2 gehören. $L_1 \cdot L_2$ enthält außer den Ecken und Strecken von L_1 und L_2 alle diejenigen Strecken, welche irgendeine Ecke von L_1 mit irgendeiner Ecke von L_2 verbinden. Ein Komplex heißt einfach, wenn er nicht Produkt zweier zueinander fremder Komplexe ist. Ein Komplex wird zusammenhängend genannt, wenn er nicht als Summe von zwei zueinander fremden Komplexen dargestellt werden kann. Ein zusammenhängender einfacher Komplex heißt elementar. Nach der Feststellung einiger Beziehungen zwischen den Operationen wird bewiesen: Jeder Komplex läßt sich aus paarweise zueinander fremden elementaren Komplexen durch Summen- und Produktbildung gewinnen. — 2. Eine Aufteilung der $e(L)$ Ecken [$e(L) =$ Ordnung von L] des Komplexes L in m Gruppen, derart, daß jede Gruppe aus paarweise zueinander nicht benachbarten Ecken besteht, heißt eine m -Aufteilung von L . Die kleinste Zahl m , derart, daß L eine m -Aufteilung besitzt, heißt Rang von L : $r(L)$. Unter den Sätzen über den Rang erscheint das folgende Theorem besonders wichtig: Wenn $r = m \cdot n$ ist, so kann der Komplex vom Range r als Summe zweier Komplexe vom Rang m bzw. n dargestellt werden. Die Anzahl der m -Aufteilungen von L werde $n_m(L)$ genannt. Diese Zahl läßt sich durch ein Reduktionsverfahren bestimmen. Wir ordnen dem Komplex L [Ordnung $e = e(L)$] das Aufteilungspolynom: $N(L) = x^e + n_{e-1}(L)x^{e-1} + \dots + n_1(L)x$ zu. Für zueinander fremde Komplexe L_1 und L_2 gilt dann: $N(L_1 \cdot L_2) = N(L_1) \cdot N(L_2)$. Sind ferner:

$N(L_1) = a_e x^e + a_{e-1} x^{e-1} + \dots + a_1 x$ und $N(L_2) = b_{e_2} x^{e_2} + b_{e_2-1} x^{e_2-1} + \dots + b_1 x$,
so wird:

$$N(L_1 + L_2) = c_{e_2} x^{e_2} + c_{e_2-1} x^{e_2-1} + \dots + c_1 x \quad \text{mit} \quad c_m = \sum_{i=1}^{e_1} \sum_{j=1}^{e_2} a_i b_j \frac{i! j!}{(m-i)!(m-j)!(i+j-m)!},$$

wenn $1/(-k)!$ für positives ganzzahliges k gleich 0 gesetzt wird. Im Hinblick auf den zitierten Satz ist es nach diesen beiden Formeln möglich, das Aufteilungspolynom eines beliebigen Komplexes zu berechnen. — 3. Der Ausdehnungsgrad $d(L)$ des Komplexes L ist die größte Zahl m , derart, daß eine m -Komponente von L (d. h. ein Unterkomplex der Ordnung m von L , in dem zwei beliebige Ecken miteinander verbunden sind) existiert. Die Dimension von L , ist um 1 kleiner als $d(L)$. Dem Komplex L werde das Dimensionspolynom $Q(L)$ zugeordnet: $Q(L) = 1 + q_1(L)x + \dots + q_{d(L)}(L)x^{d(L)}$, dabei ist $q_i(L)$ ($i \geq 1$) die Anzahl der i -Komponenten von L . Wenn L_1 und L_2 zueinander fremd sind, gelten:

$$Q(L_1 + L_2) = Q(L_1) + Q(L_2) - 1 \quad \text{und} \quad Q(L_1 \cdot L_2) = Q(L_1) \cdot Q(L_2).$$

Zwischen Rang und Ausdehnungsgrad besteht die Ungleichung: $r(L) \geq d(L)$. Für zwei beliebige positive ganze Zahlen r_0 und d_0 mit $r_0 \geq d_0$ existiert ein Komplex L_0 mit $r(L_0) = r_0$ und $d(L) = d_0$. — 4. Ein Komplex mit dem Ausdehnungsgrad d heißt d -gesättigt, wenn jede Hinzufügung einer neuen Verbindungsstrecke den Ausdehnungsgrad erhöht. Der Komplex heißt maximal gesättigt, wenn kein Komplex mit derselben Ordnung und demselben Ausdehnungsgrad existiert, der mehr Strecken enthält. Der Komplex heißt vom Minimalrang, wenn $r(L) = d(L)$ ist. Zwei Ecken A und B werden symmetrisch genannt, wenn jede Ecke C von L , die an A grenzt, auch zu B benachbart ist und umgekehrt. Der Komplex L heißt symmetrisch, wenn zwei beliebige Ecken symmetrisch sind. Die folgenden Sätze werden bewiesen: Ein Komplex ist dann und nur dann symmetrisch, wenn er Minimalrang besitzt und d -gesättigt ist. Ein symmetrischer Komplex ist Produkt von d zueinander fremden leeren Komplexen (d. h. solchen, die nur Ecken, also keine Strecken enthalten). Jeder maximal gesättigte Komplex ist symmetrisch und durch Ordnung e und Ausdehnungsgrad d eindeutig bestimmt. Setzen wir: $m = [e/d] + 1$, $r(L_1) = e - d(m-1)$ und $r(L_2) = d - r(L_1)$, so ist L das Produkt von $r(L_1)$ leeren Komplexen der Ordnung m und $r(L_2)$ leeren Komplexen der Ordnung $m-1$, die alle zueinander fremd sind. Es sei der Komplex L maximal gesättigt von der Ordnung e und

$Q(L) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_d x^d$ sein Dimensionspolynom. Ist dann $Q(M) = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_d x^d$ das Dimensionspolynom eines beliebigen Komplexes der Ordnung e und des Ausdehnungsgrades d , so gelten die Ungleichungen: $b_j \leq a_j$ ($2 \leq j \leq d$). Wenn hier für irgendein j das Gleichheitszeichen eintritt, so gilt es in allen diesen Ungleichungen. Es ist dann M maximal gesättigt. Thimm (Bonn).

Klassische theoretische Physik.

Elastizität. Plastizität. Akustik:

Rachkovitch, Daniel: *Forme dyadique des équations fondamentales de la théorie d'élasticité.* Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A 2, 248—254 u. serb. Zusammenfassg. 255—256 (1948).

Darstellung der bekannten Grundgleichungen der Elastizitätstheorie (Formänderungs- und Gleichgewichtsbeziehungen, Beltramische Gleichungen) mittels der Dyadenschreibweise. H. Neuber (Dresden).

Morris, Rosa M.: *Some general solutions of St. Venant's torsion and flexure problem. III.* Proc. London math. Soc., II. S. 51, 424—439 (1949).

In zwei früheren Arbeiten [Proc. London math. Soc., II. S. 46, 81—98 (1940); 49, 1—18 (1945); dies. Zbl. 23, 275] sind vollständige Lösungen des Biegungsproblems von de St. Venant für zylindrische Stäbe angegeben, deren Querschnitt auf einen Streifen in der ζ -Ebene ($\zeta = \xi + i \eta$) durch $z = \sum_0^{\infty} a_n \exp [(n-1) i \zeta]$ abgebildet werden kann. Wie Verf. bemerkt, ist das Problem der Biegung zylindrischer Stäbe von speziellem Querschnitt mit Längsrissen oder Schlitzten von verschiedenen Autoren mehrfach behandelt worden, dagegen wurde bisher wenig getan, um die Wirkung eines länglichen Loches auf einen Hohlzylinder unter Biegung zu klären. Vorliegende Arbeit erweitert die Ergebnisse der früheren Untersuchungen auf Hohlzylinder, deren Querschnitte von zwei Kurvenscharen $\eta = \alpha_1$ und $\eta = \alpha_2$ begrenzt werden. Es werden zwei komplexe Potentiale in Form von Reihen gefunden, die den Randbedingungen beim Problem der Biegung genügen. Anwendungen der gefundenen Lösungen auf Querschnitte, die durch zwei konfokale Ellipsen, zwei exzentrische Kreise und zwei Herzkurven (Kardioiden) begrenzt werden Gran Olsson (Trondheim).

Green, A. E.: *On Boussinesq's problem and penny-shaped cracks.* Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 251—257 (1949).

Das Problem, Druck- und Verschiebungsverteilung in einem von einem starren Stempel belasteten, elastischen, unendlich ausgedehnten Halbraum zu beschreiben, reduziert sich, wie Harding und Sneddon gezeigt haben, vermöge von Hankeltransformationen auf das andere Problem, ein Paar von Integralgleichungen bestimmter Art zu lösen. Weiter hat Sneddon [Proc. R. Soc., London, A 187, 229 (1946)] gezeigt, daß dieselbe Methode angewandt werden kann zur Bestimmung der Spannungsverteilung in der Nachbarschaft einer kreisförmigen Einkerbung eines elastischen Körpers. Da in den verhältnismäßig einfachen Ergebnissen die Besselfunktionen nicht mehr auftreten, sieht Verf. darin einen Hinweis, daß es eine einfache, von den genannten Methoden unabhängige Methode zur Erlangung des Resultates geben müsse. Es gelingt ihm, eine solche aufzufinden, indem er dem Problem die Form einer Randwertaufgabe gibt. Die Methode wird angewandt auf einige axialsymmetrische Beispiele mit schon bekanntem Resultat und auf ein neues, nicht symmetrisches Beispiel. Hardtwig (München).

Petrašen, G.: *Über das Lambsche Problem im Falle eines elastischen Halbraumes.* Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 64, 649—652 (1949) [Russisch].

Auf einen unendlichen elastischen Halbraum mit der Oberfläche $z = 0$ wirke der „Schneidenstoß“ $\sigma_{zz} = \delta(x) \cdot \delta(t)$, wo δ die Dirac-Funktion ist. Diese zwei-

dimensionale Aufgabe wurde erstmalig von H. Lamb [On the propagation of tremors over the surface of an elastic solide. Philos. Trans. R. Soc. London, A 203, 1—42 (1904)] bez. der Bewegung der Oberfläche behandelt. — Um die Lösung im Inneren des Halbraumes zu finden, wird für den Verschiebungsvektor (u, w) angesetzt: $u = \varphi_x - \psi_z$, $w = \varphi_z + \psi_x$, wo φ und ψ resp. die Logitudinal- und Transversalwellenpotentiale sind, die Wellengleichungen genügen. φ und ψ werden in doppelter Fourier-Darstellung nach x und t angeschrieben. — Hinweise auf Verformungen des Integrationsweges, die die numerische Berechnung speziell in der Umgebung der Wellenköpfe erleichtern. — Bem. d. Ref.: Die Arbeit ist inhaltlich überholt, da inzwischen durch F. Sauter [Über die Wellenausbreitung beim Stoß gegen einen elastischen Halbraum. Z. angew. Math. Mech., im Druck] gezeigt wurde, daß bei Verwendung von ebenen Polarkoordinaten die Integrale der entsprechenden doppelten Fourierdarstellung streng gelöst werden können, so daß die Spannungen im ganzen Halbraum durch elementare Funktionen ausdrückbar sind.

Hans Richter (Haltingen/Baden).

Nash, W. A.: Effect of a concentric reinforcing ring on stiffness and strength of a circular plate. J. appl. Mech., New York 15, 25—29 (1948).

Gegenstand der Untersuchung ist eine längs des Umfanges eingespannte Kreisplatte, welche durch gleichmäßig verteilten Normaldruck belastet ist. Die Platte hat konstante Dicke und besitzt einen konzentrisch angeordneten Versteifungsring. Verf. löst das zugehörige Elastizitätsproblem durch Aufstellung der Gleichgewichts- und Formänderungsbeziehungen sowohl für den außerhalb des Versteifungsringes befindlichen ringförmigen Plattenteil, wie für das Mittelstück, ferner durch Formulierung der Gleichgewichtsbedingung am Versteifungsring und der formänderungsmäßigen Anschlußbedingungen desselben. Das Ergebnis zeigt eine Abminderung der maximalen Spannungswerte und der maximalen Durchbiegung gegenüber der unversteiften Platte.

H. Neuber (Dresden).

Conway, H. D.: The bending of symmetrically loaded circular plates of variable thickness. J. appl. Mech., New York 15, 1—6 (1948).

Für symmetrisch belastete Kreisplatten mit veränderlicher Dicke (die Dicke wird proportional dem Abstand r von der Mitte vorausgesetzt) wird der Formänderungs- und Spannungszustand ausgewertet. Die Ausrechnung der maximalen Spannung und der Durchbiegung bezieht sich auf folgende Fälle (der Innenrand wird durch einen zum Außenrand konzentrischen Kreis gebildet): 1. Außen und innen eingespannt, innen Querkrafteinleitung; 2. außen frei aufliegend, innen eingespannt und Querkrafteinleitung; 3. außen eingespannt und gestützt, innen eingespannt ohne Querkrafteinleitung, Oberfläche unter konstanter Streckenlast; 4. außen frei aufliegend, innen querkraftfrei eingespannt, mit konstanter Streckenlast; 5. außen frei, innen eingespannt mit konstanter Streckenlast; 6. außen querkraftfrei eingespannt, innen mit Querkrafteinleitung eingespannt, unter konstanter Streckenlast. Der letzte Fall entspricht etwa der Spannungsverteilung in einem Kolben.

H. Neuber (Dresden).

Mann, E. H.: Shearing displacement of a rectangular plate. Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 258—262 (1949).

Das behandelte Problem entstand ursprünglich im Zusammenhang mit einem Modell von W. L. Bragg [Proc. R. Soc., London A 190, 474 (1947)], um einen kristallinen Werkstoff darzustellen. Diese Aufgabe aus der Theorie der ebenen Formänderung läßt sich auch auf den Fall anwenden, daß eine ebene Rechteckscheibe von isotropem Werkstoff durch gleichmäßige Verschiebung von zwei gegenüberliegenden Seiten gegeneinander deformiert wird, während die beiden anderen Seiten frei sind. Das Problem wurde bereits von C. E. Inglis [Proc. R. Soc., London, A 103, 598 (1923)] gelöst, aber Verf. gibt einen schnelleren und zweckmäßigeren Weg zur Erzielung der Ergebnisse an. Beide Autoren stellen eine Lösung in der Form

von unendlichen Reihen her, die genügend rasch konvergent sind, so daß ausschließlich die ersten Glieder der Reihen praktisch von Bedeutung sind. Die Lösungen durch die Reihen des Verf. genügen von selbst zwei Grenzbedingungen, nämlich konstanter Verschiebung von zwei Seiten gegeneinander und verschwindender Normalspannung an den freien Seiten. Die übrigen Randbedingungen werden durch entsprechende Wahl der Reihenbeiwerte erfüllt. Besonders einfache Mittel zur Bestimmung der Beiwerte sind entwickelt, indem die Lösung von simultanen Gleichungen vermieden wird. Die vorliegende Lösung, die nur vier Glieder der unendlichen Reihe benutzt, erreicht Ergebnisse, die in bezug auf Genauigkeit mit den Werten von Inglis vergleichbar sind, wenn zweiundzwanzig Glieder der „Inglisreihe“ berücksichtigt werden.

Gran Olsson (Trondheim).

Neuber, H.: Allgemeine Schalentheorie. I. Z. angew. Math. Mech. 29, 97—108 (1949).

Verf. entwickelt eine allgemeine Schalentheorie für Schalen beliebiger Form und Berandung und beliebig veränderlicher Wandstärke. Die Methoden des absoluten Differentialkalküls erlauben die Benutzung beliebiger (nichtorthogonaler) Koordinatensysteme. Wesentlich neu ist, daß nicht mehr die sogenannten Schnittkräfte und -momente bestimmt werden, sondern die Grundgleichungen aus den allgemeinen Gesetzen der Mechanik der Kontinua durch Integration der nach Potenzen des Abstandes von der Schalenmittelfläche entwickelten Divergenz des Spannungstensors gewonnen werden. Grundsätzlich werden nur solche Größen als Flächentensoren benutzt, welche als Komponenten von Raumtensoren auftreten. Im vorliegenden ersten Teil werden zunächst aus bekannten Theoremen des absoluten Differentialkalküls in der für die gestellte Aufgabe geeigneten Form entwickelt: Raumgeometrische Grundlagen (2), Geometrische Grundlagen für die nähere Umgebung der Schalenmittelfläche (3), der Spannungstensor der Schale (4). Alle in der elementaren Behandlung auftretenden Ableitungen werden durch Raumableitungen (kovariante Ableitungen) ausgedrückt. Es folgen: die Oberflächenbedingungen der allgemeinen Schale veränderlicher Wandstärke, wobei auch hier geeignete neue Größen (t^x, p, m^x , mit der resultierenden Tangentialkraft bzw. Normalkraft bzw. dem Moment der äußeren Kräfte im Zusammenhang stehend) zur Erzielung einer genügend allgemeinen Form der Gleichungen einzuführen sind. Da sich die Spannungsergebnisse und Momente nicht unmittelbar auf die Komponenten des Spannungstensors und seine kovarianten Ableitungen zurückführen lassen, werden in Nr. 6 die Gleichgewichtsbedingungen als Beziehungen zwischen den Komponenten des Spannungstensors und seinen kovarianten Ableitungen nach w (Koordinate in Richtung der Normalen zur Mittelfläche) gewonnen. Es ergaben sich nach Entwicklung der Divergenz des Spannungstensors nach Potenzen von w die Bedingungen für das Gleichgewicht der tangential und der normal zur Schalenmittelfläche wirkenden Kräfte, die das Problem, wie bekannt, vor Einführung eines Formänderungsgesetzes als ein statisch unbestimmtes erkennen lassen.

Reutter (Karlsruhe).

Levy, Robert S.: Effect of bending rigidity of stringers upon stress distribution in reinforced monocoque cylinder under concentrated transverse loads. J. appl. Mech., New York 15, 30—36 (1948).

Es wird die Spannungsverteilung in einer Kreiszyinderschale untersucht, welche Längs- und Querversteifungen (Stringer und Ringe) aufweist und längs zweier, diametral einander gegenüberliegender Längsversteifungen an den zugehörigen Ringsanschlußstellen radial gerichtete äußere Kräfte aufnimmt. Verf. betont, durch Berücksichtigung der Stringerbiegesteifigkeit eine Verbesserung der sonst üblichen Berechnungsweise erzielt zu haben [vgl. N. J. Hoff, J. appl. Mech., New York 11, 235 (1944)]. Der Rechnungsgang besteht nach Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen in der Zurückführung der auftretenden Größen auf eine Mindestzahl von statisch Unbestimmten, welche schließlich als Koeffizienten einer Fourierdarstellung mittels des Castiglianoschen Prinzips aus der Variation der gesamten Formänderungsenergie gewonnen werden. Als numerisches Beispiel wird eine Kreiszyinderschale mit sieben Ringen und acht Stringern, sämtlich in gleichem Abstände voneinander, näher untersucht und zugleich mit Hilfe eines Modelles einer experimentellen Prüfung unterzogen, wobei sich befriedigende Übereinstimmung ergab. Die Verbesserung gegenüber der Hoffschen Berechnungsweise besteht nach der Darstellung des Verf. in einer Herabsetzung der in den Lasteinleitungsfeldern auftretenden hohen Spannungen und einer Erhöhung der Beanspruchung in den übrigen Gebieten.

H. Neuber (Dresden).

Sonntag, G.: Kritische Betrachtung des dynamischen Widerstandes einer in mehrere Schichten aufgeteilten Platte bei Stoßbeanspruchung. Z. angew. Math. Mech. 29, 157—159 (1949).

Es wird zunächst eine dynamisch durch große Massen geringer Geschwindigkeit

sowie durch kleine Massen hoher Geschwindigkeit beanspruchte Platte untersucht; danach die im Titel angegebene Betrachtung durchgeführt. Der Vergleich der beiden Untersuchungen ergibt eindeutig, daß eine starke Platte einer dynamischen Beanspruchung weniger Widerstand entgegensetzt, als wenn sie in mehrere schwächere Platten aufgeteilt wird, eine Tatsache, die nach Ansicht des Verf. für Stahlplatten bereits bekannt ist. Wenn man die Zerstörung der obersten Platten zulassen will, ist es zweckmäßig, die Platten so weit auseinander zu legen, daß genügende Stoßenergie durch die plastische Formänderung aufgenommen werden kann. Ein Zusammenwirken der Platten durch Ausfüllen der Zwischenräume z. B. mit Sand erscheint bei überwiegender Beanspruchung auf Biegung durch große Massen und kleine Geschwindigkeiten als zweckmäßig. In bezug auf eine Beanspruchung auf Abscheren durch schnelle Massen ist die Füllung indessen als äußerst ungünstig anzusehen. Bei mehreren Platten sollte die obere aus möglichst zähem Werkstoff gewählt werden, damit bei ihrer Formänderung ein möglichst großer Teil der kinetischen Energie der auftreffenden Masse vernichtet werden kann.

Gran Olsson (Trondheim).

Hoppmann, W. H.: Impact of a mass on a damped elastically supported beam. *J. appl. Mech.*, New York 15, 125—136 (1948).

Für die erzwungene Schwingung des elastisch gebetteten Stabes unter Berücksichtigung der inneren und äußeren Dämpfung (als geschwindigkeitsproportional angenommen) wird die Differentialgleichung aufgestellt und mit Hilfe der Laplace-Transformation integriert. Die äußere Kraft, welche zunächst als beliebige Funktion der Zeit in der allgemeinen Lösung erscheint, wird für den Stoßvorgang (der Stab wird in seiner Mitte durch eine auftreffende Masse in Schwingungen versetzt) als halbe Sinuswelle angesetzt. Durch die Impulsleichung wird die Geschwindigkeit der Masse nach dem Stoß in den Rechnungsgang eingeführt; zu ihrer Bestimmung wird die Aufstellung der Energiebilanz erforderlich, wodurch die Ausdrücke trotz der getroffenen Vereinfachungen sehr unhandlich werden. An Hand numerischer Rechnungen wird für einige Beispiele der Einfluß der inneren und äußeren Dämpfung, sowie der elastischen Bettung auf die Beanspruchung und Verformung des Stabes diskutiert.

H. Neuber (Dresden).

Young, Dana: Vibration of a beam with concentrated mass, spring, and dashpot. *J. appl. Mech.*, New York 15, 65—72 (1948).

Verf. untersucht die Schwingungsvorgänge in einem geraden, einseitig eingespannten Balken mit örtlich konzentrierter Zusatzmasse an einer beliebigen Stelle. Nach einer Vorbetrachtung über die bekannten Schwingungsformen und Eigenfrequenzen des Stabes ohne Zusatzmasse geht Verf. zum eigentlichen Problem über, indem er die durch die Zusatzmasse auf den Stab übertragene Kraft als Sinusschwingung mit der unbekannten Kreisfrequenz ω und der Kraftamplitude F_0 ansetzt. Die am Stabelement geltende Differentialgleichung entspricht einer durch die Kraft $f(x) \sin \omega t$ erzwungenen Schwingung, wobei $f(x)$ in eine Reihe nach den Eigenfunktionen des frei schwingenden Stabes (Lösungen der homogenen Differentialgleichung) entwickelt wird, deren Koeffizienten sich unter Ausnutzung der Orthogonalitätseigenschaften der Eigenfunktionen leicht bestimmen lassen. Nach Lösung der Differentialgleichung diskutiert Verf. das Ergebnis zunächst durch Bestimmung von ω auf graphischem Wege, dann durch Berechnung einer Ersatzfederkonstanten, schließlich durch Berechnung einer Massenkorrektur; er geht ferner auf die Berücksichtigung einer Zusatzfeder und -dämpfung, sowie auf die bei zwei Einzelmassen geltenden Modifikationen ein.

H. Neuber (Dresden).

Carrier, G. F.: A note on the vibrating string. *Quart. appl. Math.* 7, 97—101. (1949).

Mathematische Ergänzungen und Verfeinerungen von Herleitungen zu einer Arbeit des Verf. über nicht-lineare Schwingungen elastischer Saiten [G. F. Carrier,

On the non-linear problem of the elastic string, *Quart. appl. Math.* 3, 157—165 (1945)].
Hardtwig (München).

Pinney, Edmund: *Aerodynamic oscillations in suspension bridges.* *J. appl. Mech.*, New York 15, 151—159 (1948).

Im November 1940 wurde eine der bedeutendsten Hängebrücken neuerer Bauart, welche über die Tacoma-Meerenge im Staate Washington führte, durch Sturm zerstört, wobei die durch den Sturm entfalteten Schwingungen den Bruch herbeiführten. In der Folgezeit wurden zahlreiche theoretische und experimentelle Arbeiten zur Klärung der Erscheinung durchgeführt. Vorliegende Arbeit behandelt eine symmetrische Hängebrücke mit zwei Türmen und berücksichtigt außer dem Einfluß der Türme auch den der Seitenversteifung auf den Schwingungsvorgang. Unter der Annahme, daß die Deformation der Brücke sich im wesentlichen auf eine Durchbiegung h und Torsion α des Straßenbettes zurückführen läßt, gewinnt Verf. aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen eine Differentialgleichung 4. Ordnung für h und eine 2. Ordnung für α , welche ohne Berücksichtigung der Luftkräfte (z. B. im Vakuum) innerhalb der ersten Näherung nicht miteinander gekoppelt sind. Durch die aerodynamischen Kräfte wird jedoch — analog dem Problem des Tragflügelflatterns — eine Kopplung der beiden Gleichungen bewirkt. Bei ihrer allgemeinen Lösung berücksichtigt Verf. auch die Baustoffdämpfung. Bei Anwendung der Ergebnisse auf die Tacoma-Brücke stellt sich die gegensymmetrische Schwingungsform unter Berücksichtigung der Taue als zur niedrigsten Frequenz gehörig heraus, welche offenbar ein Zerreißen der Taue herbeiführte. Windkanalmessungen an einem entsprechend den Modellgesetzen hergestellten Brückenkörper bestätigen im wesentlichen die Theorie.

H. Neuber (Dresden).

Hydrodynamik:

Ghosh, N. L.: *A note on Hamy's theorem.* *Bull. Calcutta math. Soc.* 40, 229 bis 230 (1948).

Das von Hamy (1889) entdeckte Theorem, daß eine Gleichgewichtsfigur rotierender, heterogener Flüssigkeiten niemals eine Dichteschichtung in homothetischen Ellipsoiden haben kann, beweist Verf. auf Grund der dynamischen Gleichungen und der Poissonschen Gleichung für das Potential der Gravitationskräfte. Der neue durchsichtige Beweis läßt einige Erweiterungen des Theorems erkennen, die Verf. anmerkt: Es gilt auch für eine kompressible Flüssigkeit (Gas), über die Form der Begrenzungsfläche der Gleichgewichtsfigur braucht keine Annahme gemacht zu werden, diese kann sich auch in einem Außengravitationsfeld befinden.

E. Hölder (Leipzig).

Shiffman, Max: *On free boundaries of an ideal fluid. II.* *Commun. pure appl. Math.*, New York 2, 1—11 (1949).

In Fortführung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 31, 134) wird nach dem Prinzip der Spiegelung durch freie Grenzen hindurch eine geometrische Deutung der auf ein Hindernis durch Hohlraumbildung hinter ihm ausgeübten Kraft gegeben, nach der der Widerstand leicht berechenbar wird; als Beispiele werden die symmetrische und unsymmetrische Strömung mit rückwärtsgerichtetem Strahl gerechnet.

Pretsch (Frankfurt/M.-Höchst).

John, Fritz: *On the motion of floating bodies. I.* *Commun. pure appl. Math.*, New York 2, 13—57 (1949).

Der Beschreibung der Bewegung eines mechanischen Systems, das aus einer schweren Flüssigkeit und einem teilweise eingetauchten Körper besteht, stehen bekanntlich Schwierigkeiten entgegen, weil die Lösung der Potentialgleichung durch nichtlineare Randbedingungen auf einer veränderlichen Berandung bestimmt ist. Wenn man in erster Vereinfachung das Problem linearisiert, dann werden die Randbedingungen lineare Bedingungen auf festen Oberflächen, die die Berandung bei Ruhe oder im Gleichgewicht bilden. In dieser für eine explizite Lösung noch immer zu verwickelten Theorie wird das Problem periodischer Bewegungen im später erscheinenden Teil II auf eine Fredholmsche Integralgleichung zurückgeführt werden. Eine explizite Beschreibung gelingt jedoch, wenn man sich weiter auf solche Fälle beschränkt, in denen die Wellenlänge der Störungsbewegung und die Krümmungsradien des schwimmenden Körpers groß sind im Vergleich zur Flüssigkeitstiefe, also auf eine Seichtwasser- oder Langwellen- und Flachkörpertheorie. Benutzt wird hierbei das von K. O. Friedrichs [*Commun. appl. Math.*, New York 1, 81—87 (1948)] bei der Ableitung der nichtlinearen Seichtwassertheorie eingeführte Schema, in dem die Seichtwassernäherung erstes Glied einer allgemeinen Entwicklung ist und das sich leicht auf den Fall ausdehnen läßt, daß bewegte Körper vorhanden sind. Die strenge

Herleitung der freien Oberflächenbedingung für Seichtwasser gelingt mit einer Greenschen Funktion auf Grund der exakten Gleichungen, wie in Teil II bewiesen werden soll. Der entgegengesetzte Extremfall einer dünnen, vertikal in unendlich tiefes Wasser eingetauchten Platte ist von Ursell [Quart. J. Mech. appl. Math. 1, 246—252 (1948)] behandelt worden. Vollständig gelöst wird die Seichtwassertheorie für den zweidimensionalen Fall (Schwimmkörper als Zylinder) und zwar a) für die Bewegung, die von einem frei schwimmenden Zylinder herrührt, der anfänglich aus einer über seiner Gleichgewichtslage befindlichen Lage losgelassen wird, wobei die vertikale Auslenkung der freien Oberfläche, wie sich errechnet, bei geringerem Eintauchen maximal das 0,7-fache der anfänglichen vertikalen Gleichgewichtsverrückung betragen kann, b) für die Wellen, die von einer erzwungenen periodischen Zylinderbewegung herrühren, c) für die Störungswirkung eines festgehaltenen Zylinders auf einfallende ebene Wellen und d) für die Wirkung eines frei schwimmenden Zylinders auf einfallende ebene Wellen, wobei sich die Amplitude der erregten Schwimmerbewegung bei stärkerem Eintauchen größer als die Amplitude der Wellenbewegung ergibt und auch die von E. Isaacson durchgeführte Berechnung der Horizontal- und Drehbewegung für Rechteckquerschnitt des eingetauchten Zylinderteils mitgeteilt wird. Als einziges dreidimensionales Problem wird in Analogie zu a) die von einem frei schwimmenden und aus einer über seiner Gleichgewichtslage befindlichen Stellung losgelassenen Rotationskörper erzeugte Wellenbewegung behandelt; mit Hilfe einer Laplace-Transformation wird die Lösung in Integralform angegeben. In Teil II sollen Fragen von mehr grundlegendem mathematischem Interesse aus der linearisierten Theorie besprochen werden. *Pretsch.*

Meksyn, D.: The laminar boundary-layer equations of bodies of revolution. Motion of a sphere. Proc. R. Soc., London, A 194, 218—228 (1948).

Das in einer früheren Arbeit beschriebene Verfahren zur Berechnung der laminaren Grenzschicht an einem zylindrischen Körper [Proc. R. Soc., London, A 192, 545—567 (1948)] wird auf den Rotationskörper übertragen, indem die Flüssigkeitsbewegung auch hier durch eine Stromfunktion der beiden Orthogonalkoordinaten: reibungsloses Geschwindigkeitspotential und entsprechende Stromfunktion beschrieben wird. Für die Kugel ist die Übereinstimmung der berechneten örtlichen Schubspannungswerte mit den von Fage gemessenen Werten bis zur Ablösung recht gut. *Pretsch* (Frankfurt-Höchst).

Görtler, H.: Reibungswiderstand einer schwach gewellten, längs angeströmten Platte. Arch. Math., Karlsruhe 1, 450—453 (1949).

Im Anschluß an zwei frühere Arbeiten (dies. Zbl. 29, 89, 175) wird der mathematische Beweis für die dort ausgesprochene Behauptung nachgeholt, daß der Reibungswiderstand einer schwachwelligen Platte geringer ist als derjenige der ebenen Platte. *Pretsch* (Frankfurt/M.-Höchst).

Batchelor, G. K. and A. A. Townsend: A comment on N. F. Frenkiel's note „on third-order correlation and vorticity in isotropic turbulence“. Quart. appl. Math. 7, 120 (1949).

Einige Annahmen von F. N. Frenkiel bezüglich der Korrelationsfunktion und anderer Größen beim Abklingen der Geschwindigkeitsschwankungen in isotrop turbulenten Strömungen werden kritisiert, einerseits, weil Folgerungen daraus von Versuchsergebnissen der Verff. [Proc. R. Soc. London, A 190, 534—550 (1947)] wesentlich stärker abweichen als der möglichen Versuchungenauigkeit entspräche, andererseits, weil auch Widersprüche innerhalb der Theorie abgeleitet werden könnten. [Anm. d. Ref.: Im Grunde ist diese Kontroverse nur ein weiteres Beispiel dafür, daß die Turbulenztheorie noch immer im Anfangsstadium der dimensionsanalytischen Hypothesenbildung steht, wozu ja auch Annahmen über das Gleichbleiben gewisser Funktionen (selfpreserving) zu zählen sind. So ergeben sich verschiedene Theorien je nach dem mathematischen Aufwand und der Ebene, in der solche mehr oder weniger anschaulichen Annahmen gemacht werden, die möglichst direkt durch Messungen zu belegen sind, bevor weitere Folgerungen gezogen werden. Das Hauptverdienst der von G. J. Taylor begründeten statistischen Theorie dürfte vorläufig noch immer darin liegen, eine Meßtechnik für die grundlegenden Korrelationen der Geschwindigkeitsschwankungen angeregt zu haben, während innerhalb der eigentlichen Theorie — abgesehen natürlich von rein kine-

matischen Beziehungen — noch keine physikalische Hypothese als völlig gesichert erscheint.] *K. Wieghardt* (London).

Lighthill, M. J.: The drag integral in the linearized theory of compressible flow. *Quart. J. Math. (Oxford Ser.)* **20**, 121—123 (1949).

Ausgehend von der Impuls Gleichung stellt Verf. für die linearisierte Strömung einer kompressiblen Flüssigkeit eine Formel für den Widerstand eines Körpers auf, welche nach Elimination des Druckes mittels der Bernoullischen Gleichung nur noch in einer, längs einer beliebigen, den Körper umschließenden Fläche zu führenden Integration besteht, wobei der Integrand allein vom Geschwindigkeitspotential abhängt. *H. Neuber* (Dresden).

Tempest, R. K. and L. Rosenhead: Notes on the linearised equation for the velocity potential of the steady supersonic flow of a compressible fluid. *Proc. London math. Soc., II. S.* **51**, 197—212 (1949).

Die linearisierte Gleichung für das Geschwindigkeitspotential einer räumlichen stationären Überschallströmung ist identisch mit der zweidimensionalen Wellengleichung. Die Lösungen dieser Gleichung für die Überschallströmung sind nach Ref. vom „kegeligen Typus“, d. h. Druck und Geschwindigkeit sind konstant auf Kegelflächen mit gemeinsamer Spitze und Achse; sie sind veränderlich nur mit dem halben Öffnungswinkel des Kegels. In der vorliegenden Arbeit werden bekannte Lösungen der ebenen Wellengleichung als Überschallströmungen von dem angegebenen Typus gedeutet. Darüber hinaus werden zwei neue mathematische Typen von Lösungen gegeben, deren physikalische Interpretation aber noch aussteht.

H. Schlichting (Braunschweig).

Bailey, W. N.: A note on the paper by Tempest and Rosenhead. *Proc. London math. Soc., II. S.* **51**, 213—214 (1949).

Zu einer der in der vorstehend besprochenen Arbeit angegebenen neuen Lösungen der linearisierten Überschallströmungen werden einige mathematische Ergänzungen gegeben. *H. Schlichting* (Braunschweig).

Wecken, Franz: Grenzlagen gegabelter Verdichtungsstöße. *Z. angew. Math. Mech.* **29**, 147—155 (1949).

Verzweigte Verdichtungsstöße sind durch Vorgabe von zwei Bestimmungsstücken eindeutig bestimmt oder lassen jedenfalls nur eine begrenzte Zahl von Lösungen zu. In einem Diagramm, dessen Abszissen durch zwei passend gewählte Bestimmungsstücke gebildet werden, kann die Gesamtheit der gasdynamisch möglichen stationären Gabelstöße geometrisch durch zwei Flächenstücke dargestellt werden, die von je einem geschlossenen Linienzug berandet werden. Die beiden Randkurven setzen sich aus vier Teilstrecken zusammen, denen vier Typen von Grenzlagen entsprechen. Physikalisch sind die vier Grenzlagen dadurch bedingt, daß einer der beiden Teilstöße unendlich schwach wird, also in eine Machsche Linie übergeht, oder bei unendlich großer Machscher Zahl der Ausströmung einer der beiden Teilstöße unendlich stark wird. Berechnungs- und Konstruktionsverfahren für sämtliche Grenzlagen werden angegeben. Frühere Darstellungen von A. Weise, F. Eggink und Ref. werden ergänzt bzw. berichtigt. *Wuest* (Göttingen).

Grad, Harold: Note on straight pipe jet motors. *Commun. pure appl. Math., New York* **2**, 71—77 (1949).

Auf elementare Weise wird aus den Erhaltungssätzen von Masse, Impuls und Energie nachgewiesen, daß in einem geraden Strahlrohr die Schallgeschwindigkeit nicht überschritten werden kann und für hohe Verbrennungsgeschwindigkeit am Austritt erreicht wird. Für geringere Verbrennungsgeschwindigkeit erhält man Unterschallströmung. Der Schub hängt nicht davon ab, ob das Treibmittel an mehreren Punkten oder in einem Punkt zugeführt wird, wenn die chemische Reaktion in beiden Fällen gleichartig ist. *Pretsch* (Frankfurt/M.-Höchst).

Grad, Harold: Resonance burning in rocket motors. Commun. pure appl. Math., New York 2, 79—102 (1949).

Um die Resonanzverbrennung in Raketentriebwerken, die sich bei der Verbrennung einer Hohlzylindertreibladung in gefährlichen Druckspitzen in der Verbrennungskammer äußert, zu erklären, wird als einfaches Modell der Gasströmung die Strömung in einem zylindrischen Rohr untersucht, das an einem Ende geschlossen und am anderen offen ist. Die Randbedingung am offenen Ende wird durch eine akustische Impedanzbedingung ersetzt, die streng nur für reine Längsschwingungen gilt. Zur Formulierung der Randbedingung an der Brennwand (Zylindermantel) wird die Abhängigkeit der Verbrennungsgeschwindigkeit von Druck und Temperatur als bekannt vorausgesetzt, wobei auch der Zeitverzug zwischen chemischer Reaktion an der Brennwand und dem Gleichgewichtszustand berücksichtigt werden muß. Die Stabilitätsrechnung ergibt Resonanzgefahr, wenn eine gewisse Linearkombination der beiden Ableitungen der Verbrennungsgeschwindigkeit nach Druck und Temperatur die Machzahl an der Brennwand überschreitet. Die Störungswelle breitet sich dabei spiralenförmig um den Zylinder aus. Es werden einige Empfehlungen über zweckmäßige Formgebung der Hohltriebladung mitgeteilt.

Pretsch (Frankfurt/M.-Höchst).

Reissner, Hans: Blade systems of circular arrangement in steady, compressible flow. Studies Essays, pres. to R. Courant, 307—327 (1948).

Einem bereits 1911 von H. Lorenz angegebenen Gedankengang folgend, ersetzt Verf. die Schaufeln eines Verdichter- bzw. Turbinenrades durch ein kontinuierliches, axialsymmetrisches Kraftfeld. Dies setzt also sehr große, streng genommen sogar unendlich große Schaufelzahl voraus. Während jedoch H. Lorenz seine Theorie auf inkompressible, drehungsfreie Strömungen und ein gleichmäßig über den Querschnitt verteiltes Kraftfeld beschränkte, läßt Verf. diese Einschränkungen fallen. Er geht dabei im Fall von Axialverdichtern oder -Turbinen von einer passend gewählten axialen Geschwindigkeitskomponente $w(r, z)$ aus, bzw. im Fall von radial durchströmten Kreiselrädern von der radialen Geschwindigkeitskomponente $u(r, z)$. Wegen der vorausgesetzten Axialsymmetrie liefert dann die Kontinuitätsgleichung bei ebenfalls gegebener Druck-Dichte-Funktion, die nicht notwendig einer Adiabate entsprechen muß, die zweite Geschwindigkeitskomponente $u(r, z)$ bzw. $w(r, z)$. Aus der Bernoullischen Energiegleichung wird schließlich die dritte Geschwindigkeitskomponente $v(r, z)$ ermittelt. Mit Hilfe der Eulerschen Gleichungen kann man aus dem so bestimmten Geschwindigkeitsfeld sofort das Kraftfeld errechnen und somit auch das übertragene oder abgegebene Drehmoment. Schließlich werden die Stromlinienflächen und damit auch die Schaufelformen aus dem Geschwindigkeitsfeld durch Integration gewonnen, und zwar in Abhängigkeit von den Anfangswerten der Geschwindigkeiten beim Eintritt in die Schaufeln. Bei großer, jedoch endlicher Schaufelzahl kann man in erster Näherung die auf eine einzelne Schaufel wirkende Druckverteilung durch Integration des Kraftfeldes zwischen zwei Schaufeln ermitteln. — Im zweiten Teil seiner Arbeit entwickelt Verf. eine genauere Theorie für eine endliche Blattzahl. Er geht davon aus, daß zunächst nach der Theorie des kontinuierlichen, symmetrischen Kraftfeldes die Stromlinienflächen berechnet werden. Nun wird etwa in der Mitte zwischen zwei benachbarten Schaufeln je eine Stromlinienfläche festgehalten oder gewissermaßen als „eingefroren“ betrachtet. Das vorher kontinuierliche Kraftfeld wird auf die Schaufeln konzentriert. Die „eingefrorenen“ Stromlinienflächen müssen dann durch die Trägheitswirkung einer Zusatzströmung erhalten werden, die in Potenzreihen nach dem Winkelabstand von diesen festen Flächen entwickelt werden kann. Bei enger Teilung sind die ersten Glieder dieser Reihen ausreichend. Unter Berücksichtigung der Zusatzströmung werden neue Stromlinienflächen berechnet, die mit den früheren nur an den festgehaltenen Flächen übereinstimmen. Nähert man sich, von zwei benachbarten Stromlinienflächen ausgehend, etwa der Sektorenmitte, so schneiden sich die neuen Stromlinienflächen und liefern somit die Form einer endlich dicken Schaufel mit Druck- und Sogseite. *Wuest* (Göttingen).

Elektrodynamik:

Ott, Heinrich: Bemerkung zur klassischen Magnetostatik. Z. Naturforsch. 3a, 422—425 (1948).

Nach der Magnetostatik ist das Feld eines Elementarmagneten in einem Medium der Permeabilität μ um den Faktor $1/\mu$ schwächer als das Feld dieses Magneten im Vakuum. Andererseits enthält der formelmäßige Zusammenhang für das Feld eines

Molekularstroms auch im Medium die Größe μ nicht. Dies könnte zur Vermutung führen, daß in paramagnetischen Medien ein wesentlicher Unterschied im Verhalten von Elementarmagneten und Molekularströmen besteht. Verf. zeigt nun, daß dies nicht der Fall ist. Bringt man nämlich einen solchen Molekularstrom aus dem Vakuum in das Medium, so wird durch Induktionswirkung infolge der Feldrückwirkung durch das Medium die Stärke J des Molekularstromes so verändert, daß das Produkt $Jf\mu$ konstant bleibt, wobei f die vom Strom umrandete Fläche bedeutet.

F. Sauter (Göttingen).

Livens, G. H.: Note on magnetic energy. *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. 71, 58—63 (1947).

Polemische Darstellung der verschiedenen Möglichkeiten, die magnetische Feldenergie der klassischen Maxwellschen Theorie zu gewinnen bzw. zu verwerten.

F. Sauter (Göttingen).

Voge, Jean: Sur la répartition entre les différentes fréquences de l'énergie créée par un tube électronique. *C. r. Acad. Sci.*, Paris 228, 1371—1373 (1949).

Verf. diskutiert den (komplexen) Energiesatz der klassischen Elektrodynamik für periodische Felder

$$\int \mathcal{E} \times \mathfrak{S}^* d\vec{f} = - \int \mathcal{E} \mathfrak{S}^* dV - i\omega \int \mu |\mathfrak{S}|^2 - \varepsilon |\mathcal{E}|^2 dV$$

und untersucht die physikalische Bedeutung der einzelnen Summanden für den Fall frei beweglicher Ladungen, wie sie in Elektronenröhren vorkommen. Die Inanspruchnahme der obigen Gleichung für die einzelnen Fourierkomponenten des Feldes wird nicht bewiesen.

Mann (München).

Ferraro, V. C. A.: The induction of currents in infinite plane current-sheets. II. *Proc. London math. Soc.*, II. S. 49, 77—98 (1947).

In Teil II seiner Arbeit über die Induktion elektrischer Flächenströme in einer allseits ausgedehnten Ebene (Teil I vgl. dies. Zbl. 23, 81) berichtet Verf. über weitere Ergebnisse seiner Untersuchungen. Im ersten Abschnitt wird zunächst das allgemeinere Problem der Induktion von Flächenströmen durch ein aperiodisches elektromagnetisches Feld behandelt. Dabei wird angenommen, daß für die Strömung das Ohmsche Gesetz maßgebend ist. Es werden Formeln angegeben, welche die Größen des elektromagnetischen Feldes beschreiben, das durch die Flächenströme erzeugt wird. Die Ergebnisse sind jedoch zu verwickelt, als daß sie eine physikalische Interpretation gestatten könnten. Von dem in Teil I behandelten Fall werden noch Einzelheiten über die Polarisation der Ebene mitgeteilt, ebenso von dem Fall eines gleichförmig gegenüber der Ebene bewegten elektrostatischen Feldes. — Im zweiten Abschnitt werden die Modifikationen der Theorie mitgeteilt, die sich aus der Annahme ergeben, daß die Ebene eine unbegrenzte Leitfähigkeit besitze. Unter gewissen Voraussetzungen läßt sich zeigen, daß die schon in Teil I erwähnte, die Strömung beschreibende Gleichung identisch mit der für Supraeleiter ist. In diesem Fall kann aus der formalen Lösung ein unmittelbarer Einblick in die physikalischen Zusammenhänge gewonnen werden.

Quade (Hannover).

Atkinson, F. V.: On Sommerfeld's „Radiation condition“. *Philos. Mag.*, J. theor. exper. appl. Physics, VII. S. 40, 645—651 (1949).

Eine Lösung der Wellengleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in einem unendlich ausgedehnten Medium ist noch nicht bestimmt durch ihre Quellschwerpunkte und die Bedingung des Verschwindens im Unendlichen, da stets noch (singularitätenfreie) Eigenschwingungen hinzuaddiert werden können, die die Randbedingung erfüllen. Sommerfeld forderte daher 1912 eine sogenannte „Ausstrahlungsbedingung“, wonach im Unendlichen nur divergierende Wellen auftreten sollen. Verf. gibt einen mathematisch einwandfreien Beweis, daß diese Bedingung das Problem eindeutig macht. Es sei hier darauf verwiesen, daß Magnus [1942; dies. Zbl. 27, 316] und Rellich [1943; dies. Zbl. 28, 164] in den Jahresberichten der deutschen Mathematikervereinigung die vom Verf. publizierten Resultate größtenteils vorweggenommen haben.

Mann (München).

Albert, G. E. and J. L. Synge: The general problem of antenna radiation and the fundamental integral equation, with application to an antenna of revolution. I. *Quart. appl. Math.* 6, 117—131 (1948).

Die von Verff. entwickelte Antennentheorie geht aus von der Lorentzschen Formulierung des Poyntingschen Satzes, der bei der Aufstellung des Reziprozitätstheorems von Bedeutung war. Sie führt von da direkt zu einer Integralgleichung für den Strom auf einer beliebig geformten, rotationssymmetrischen Antenne. In ihrer Form weicht die Gleichung von der Hallénschen Integralgleichung ab. Besonderer Wert wird auf die Diskussion der Ankopplung an eine Speiseleitung gelegt, deren Querdimension nicht, wie meist üblich, als unendlich schmal angenommen wird und die nicht in der Mitte der Antenne zu liegen braucht. Für die praktische Durchführung der Rechnung muß allerdings angenommen werden: Wellenlänge \gg Querdimension der Speiseleitung \gg Antennenradius. Dagegen treten „Endeffekte“ nicht in Erscheinung, sofern die Antennenform durch eine stetig differenzierbare Kurvenform gegeben ist. — Als berechenbare Antennenformen werden angeführt die längs ihrer Erstreckung angeregte Mastantenne, die Mikrowellenantenne, die sphärische Antenne und schließlich die in eine unendlich ausgedehnte leitende Ebene einmündende Koaxialleitung mit verlängertem Innenleiter als Antenne, wie sie zur Anregung von Hohlleitern Verwendung finden. *Mann (München).*

Synge, J. L.: The general problem of antenna radiation and the fundamental integral equation, with application to an antenna of revolution. II. Quart. appl. Math. 6, 133—156 (1948).

Die Arbeit ist eine Fortsetzung der Arbeit von Albert und Synge (s. vorsteh. Referat) und bringt die Lösung der Stromverteilungsintegralgleichung; zuerst allgemein die Eingangsimpedanzberechnung, dann die Spezialisierung auf eine dünne Antenne mit zentrischer und exzentrischer Anregung und mit flachen und abgerundeten Antennenenden. Zahlreiche Figuren geben Abhängigkeit der Eingangsimpedanz vom Verhältnis Antennenlänge/Wellenlänge, Antennenlänge/Antennenradius und von der Endenabrundung. Die Resultate umfassen die von Labus, Hallén, King und Schelkunoff berechneten Spezialfälle. *Mann.*

Kisúniko, G. B.: Zur Theorie der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Rohren mit sprunghaft veränderlichem (Quer)Schnitt. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 58, 1653—1656 (1947) [Russisch].

Es wird die Lösung für die Aufgabe angegeben, die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Hohlleitern mit sprunghaft veränderlichem Querschnitt zu untersuchen. Dabei wird wie üblich das Material der Hohlleiterwandung als unendlich gut leitend angesehen. Die Erregung des Hohlleiterfeldes wird ins Unendliche verlegt. Das primär Gegebene ist ein einzelner oder eine Gruppe von stationären Wellenzügen, die sich in einem der beiden Rohre, im vorliegenden Falle in dem Rohr mit dem kleineren Querschnitt, aus dem Unendlichen kommend auf die bei $z = 0$ gelegene Stoßstelle zu bewegen. — Wie in den gleichartigen Aufgaben, die auf diesem Gebiet während des Krieges im In- und Ausland behandelt worden sind, wird für die Lösung der Aufgabe von der Erkenntnis ausgegangen, daß sich im eingeschwungenen Zustand das resultierende elektromagnetische Feld in beiden Rohrhälften aus dem vollständigen Linienspektrum zusammensetzen lassen muß. Von jeder Eigenwelle ist zwar die räumliche Verteilung ihres Eigenfeldes, nicht aber ihre Amplitude bekannt. Das Feld jeder dieser Eigenwellen erfüllt in der zuständigen Rohrhälfte die Randbedingungen an den Wandungen der Rohrleiter. Die unbekannten Amplituden der Eigenwellen lassen sich dann eindeutig aus den Randbedingungen in der Querschnittsfläche der Stoßstelle bestimmen. Verff. bevorzugt für die Berechnung dieser Amplituden die Matrizenmethode. Die beiden expliziten Formeln für die Reflexionskoeffizienten, die er am Schluß seiner Arbeit angibt, stellen erste Näherungen dar, die unter der Annahme berechnet worden sind, daß es im wesentlichen auf die Glieder der Hauptdiagonale der Matrizen ankommt.

H. Buchholz (Seeheim/Bergstr.).

Pozovskij, M. I.: Elektromagnetische Prozesse beim Vorhandensein magnetischer Zähigkeit. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 59, 1429—1432 (1949) [Russisch].

Es wird eine zuerst von V. Arkadiew behandelte Aufgabe aus dem Gebiet der magnetischen Nachwirkungerscheinungen in verallgemeinerter Fassung gelöst. In dem einfachen Falle einer Spule mit magnetisierbarem Kern, deren Wicklung den Widerstand R hat, gilt bekanntlich für die Spannung der Klemmen an den Spule die Gleichung: $U(t) = Ri(t) + d\Phi/dt$. Unter Berücksichtigung der Nachwirkungerscheinungen im Kernmaterial läßt sich die Beziehung für den magnetischen Fluß Φ in der Spule unter den verallgemeinerten Annahmen des Verf. auf Grund von Überlegungen, die zuerst Volterra angewendet hat, auf die Form bringen:

$$\Phi(t) = 4\pi S n n_1 \left[\mu_1 \cdot i(t) + 4\pi \int_{-\infty}^t \varphi(t-\tau) \cdot i(\tau) \cdot d\tau \right].$$

Hierin ist S der Kernquerschnitt der Spule, n die gesamte Windungszahl, n_1 die Windungszahl je cm und μ_1 die Permeabilität. Wird Φ aus den beiden obigen Gleichungen eliminiert, so erhält man für $i(t)$ die Integrodifferentialgleichung:

$$L \cdot \frac{di}{dt} + P \cdot i(t) + A \cdot \int_{-\infty}^t \frac{\partial \varphi(t-\tau)}{\partial t} i(\tau) \cdot d\tau = U(t),$$

worin die Koeffizienten L , P und A in hier nicht interessierender Weise von den Konstanten in den ersten beiden Gleichungen abhängen. — An dieser Gleichung werden dann einige Zwischenbetrachtungen angestellt. Es wird z. B. ihre Lösung angegeben, wenn sich darin $U(t)$ periodisch ändert. Interessanter ist aber der ebenfalls vom Verf. behandelte Fall, daß im Zeitpunkt $t = 0$ die Spannung U plötzlich verschwindet und $i(0)$ einen festen vorgegebenen Wert hat. Die obige Integrodifferentialgleichung wird dann unter diesen Annahmen für den Fall gelöst, daß

$\partial \varphi / \partial t = - \sum_{m=1}^p \chi_m \cdot \exp(-\sigma_m(t-\tau))$ ist für alle $\tau \geq 0$ und identisch verschwindet für

$-\infty < \tau < 0$. Die Lösung stellt sich in der Form dar: $i(t) = \sum_{k=1}^{p+1} c_k \cdot e^{r_k t}$, worin die r_k die

$p+1$ Wurzeln einer Gleichung $(p+1)$ -ten Grades in r sind, deren Koeffizienten sich durch die gegebenen Größen ausdrücken lassen. Die c_k ergeben sich als die Lösungen eines Systems von $p+1$ linearen Gleichungen. Treten mehrfache Wurzeln auf, so ist die Lösung in bekannter Weise abzuändern. Es sind sowohl Eigenschwingungen als auch rein aperiodische Prozesse möglich. — Zum Schluß wird auch noch der Fall betrachtet, daß die Formen der Funktionen $U(t)$ und $\varphi(t-\tau)$ nicht spezieller Natur sind und der reelle Einfluß der Nachwirkung von $-\infty \cdots t$ berücksichtigt wird.

H. Buchholz (Seeheim/Bergstr.).

Jaeger, J. C.: Repeated integrals of Bessel functions and the theory of transients in filter circuits. J. Math. Physics, Massachusetts 27, 210—219 (1948).

Bei Einschwingvorgängen an dämpfungsfreien Tiefpaßketten, die durch einen Diracspannungsimpuls verursacht sind, verlaufen die Ströme im n -ten Kettenglied exakt nach einer Besselfunktion J_{2n} . Bei Hochpaßfiltern lassen sich die Einschwingvorgänge zurückführen auf eine Summe über mehrfache Integrale der Besselfunktionen bzw. direkt auf eine Hankeltransformierte von J_n . Verf. berechnet sowohl die n -fachen Integrale über Besselfunktionen (bis $n=7$) und diese Hankeltransformierte (Hochpaßfilterfunktion), ebenfalls für den Einschwingvorgang bis zum 7. Kettenglied, bei deren Kenntnis sich, wie ausgeführt wird, auch kompliziertere Bandpaßschaltungen hinsichtlich ihres Einschwingvorgangs einfach berechnen lassen.

Mann (München).

Cotte, Maurice: Sur deux critères de qualité d'un système linéaire de transmission. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1693—1695 (1949).

Wenn man mittels eines linearen Netzwerks einen Impuls — etwa einen Diracimpuls — überträgt und wenn man die Übertragungsgüte dieses Netzwerks als Minimum der quadratischen Abweichung von Ausgangs- zu Eingangsspannung definiert, wobei der Verstärkungsfaktor geeignet gewählt werden kann, so läßt sich zeigen, daß die Übertragungsgüte nur abhängt von dem über den Übertragungsbereich gemittelten Quadrat der Abweichung des Übertragungsmaßes $\Gamma = \alpha + i\beta$ von dem Übertragungsmaß eines idealen Verstärkers mit konstanter Amplitude und linearer Phase.

Mann (München).

Atomphysik.

Quantenmechanik:

• Heitler, W.: *Eléments de Mécanique ondulatoire*. Traduit de l'anglais par A.-R. Weill. Paris: Presses Universitaires de France 1949. 132 p., 37 fig., fr. 400.

Das Bändchen ist eine Übersetzung von „Elementary wave mechanics“ (Oxford, Clarendon Press 1945) und gibt eine weitgehend elementare Einführung in das Gebiet mit dem Ziel, die chemische Bindung verständlich zu machen. Die Wellenmechanik wird auf die Erfahrung des un stetigen Energieaustausches zwischen Atom und Strahlung und der Elektroneninterferenzen gegründet. Als Einelektronensystem wird das H-Atom behandelt. Beim Zweielektronensystem wird das Paulische Prinzip und der Spinanteil der Wellenfunktion eingeführt und die Zustände des He-Atoms untersucht. Die Grundzustände der übrigen Atome werden kurz mit dem Vektormodell behandelt. Die chemische Bindung wird an der H_2 -Molekel als Störung des Zustandes zweier getrennter H-Atome erläutert, bei He—H und H_2 —H wird die Absättigung aufgezeigt. Dies wird qualitativ zur Lehre von der Spinvalenz verallgemeinert, der besondere Fall des C-Atoms eingegliedert und die Gründe der gerichteten Valenz angegeben.

F. Hund (Jena).

Lennard-Jones, Sir John: *The molecular orbital theory of chemical valency*. I. The determination of molecular orbitals. II. Equivalent orbitals in molecules of known symmetry. Proc. R. Soc., London, A 198, 1—13, 14—26 (1949).

I. In einem Atom oder einer Molekel läßt sich die Schrödinger-Gleichung für den Zustand aller N Elektronen (Gleichung im $3N$ -dimensionalen Raum) genähert zurückführen auf ein System von Differentialgleichungen für N Funktionen im dreidimensionalen Raum, die je einem Elektron entsprechen (Gaunt-Slater-Fock-sche Erweiterung des Hartreeschen Verfahrens). Sie wird hier mit der Methode einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl 2, 229) auf Molekeln angewandt. Insbesondere wird für Systeme von der Symmetrie einer dreieckigen Molekel XY_2 gezeigt, wie die in der Rechnung auftretenden Funktionen durch andere Funktionen ersetzt werden können, die lokalisierten Bindungen entsprechen (was bisher wohl nur qualitativ bekannt war). — II. Auch für Systeme von der Symmetrie einer nicht ebenen regelmäßigen Molekel XY_3 oder einer tetraedrisch angeordneten Molekel XY_4 werden die Gleichungen für die Funktionen der einzelnen Elektronen so umgeformt, daß Funktionen auftreten, die lokalisierten Bindungen entsprechen.

F. Hund (Jena).

Kohn, Walter: *Two applications of the variational method to quantum mechanics*. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 71, 635—637 (1947).

Zur Lösung der Schrödingergleichung nach der Variationsmethode geht Verf. von der ungestörten Wellenfunktion $\psi_0(x_k)$ aus, aber im gestreckten n -dimensionalen Grundgebiet, $\psi_1 = \lambda^{n/2} \cdot \psi_0(\lambda x_k)$. λ wird aus der Minimumforderung bestimmt. — Zur Berechnung der höheren Energieniveaus wendet er einen Satz aus Courant-Hilbert I an, daß $E_1 + E_2 + \dots + E_k = \min (H_{11} + H_{22} + \dots + H_{kk})$ ist, mit $E_k = k$ -ter Eigenwert, und $H_{ik} = \int \varphi_i^* H \varphi_k d\tau$. So ergibt sich z. B. der 2. Eigenwert aus der Forderung, daß

$$E_2 = \min \left\{ \frac{H_{11} N_{22} - 2 H_{12} N_{12} + H_{22} N_{11}}{N_{11} N_{22} - N_{12}^2} \right\} - E_1, \quad \text{mit } N_{ik} = \int \varphi_i^* \varphi_k d\tau.$$

Die genaue Kenntnis der Eigenfunktion des Grundzustandes ist nicht erforderlich, sondern nur der genaue Eigenwert E_1 , und eine grobe Näherungsfunktion φ_1 . Orthogonalität der höheren Näherungsfunktionen zu den tieferen Eigenfunktionen ist nicht notwendig.

Romberg (Blindern/pr. Oslo).

Kohn, W.: A note on Weinsteins variational method. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 71*, 902—904 (1947).

Die Weinsteinsche Methode zum Auffinden unterer Schranken für die Eigenwerte bei Variationsproblemen wird erweitert. So ergibt sich eine untere Schranke des n -ten Niveaus, E_n^u , aus einer unteren Schranke des $n + 1$ -ten, E_{n+1}^u , nämlich

$$E_n > E_n^u = H_{nn} - \frac{(H^2)_{nn} - (H_{nn})^2}{E_{n+1}^u - H_{nn}},$$

wobei φ_n nicht orthogonal zu sein braucht zu den niedrigeren Eigenfunktionen, sondern nur die Bedingung erfüllen muß, daß $H_{nn} = \int \varphi_n^* H \varphi_n d\tau \leq E_{n+1}^u$ ist. E_{n+1}^u kann z. B. aus Experimenten bekannt sein. — Eine entsprechende Beziehung gilt für die Berechnung einer oberen Schranke aus einer solchen für das nächst niedrigere Niveau.

Romberg (Blindern/pr. Oslo).

Ore, Aadne: Note on the stability of systems containing a light positive particle. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 73*, 1313—1317 (1948).

Es wird abgeschätzt, welche Masse das Meson mindestens haben müßte, um einen Wasserstoffkern in verschiedenen Molekülen und Ionen ersetzen zu können, ohne dadurch die dynamische Stabilität zu stören. Einerseits werden dazu benutzt experimentelle Werte in Verbindung mit Variationsrechnung, andererseits die Berechnung der Elektronenaffinität des Positroniums und der Bindungsenergie des Positroniummoleküles (s. die folgenden Referate).

Romberg.

Hylleraas, Egil A.: Electron affinity of positronium. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 71*, 491—493 (1947).

Die Berechnung der Elektronenaffinität des Positroniums gestaltet sich sehr ähnlich der entsprechenden Berechnung beim H-Atom, da ja nur das Proton durch ein positives Elektron ersetzt gedacht ist. Verf. benutzt die Variationsmethode in gleicher Weise wie früher bei seiner Berechnung des He-Problems.

Romberg (Blindern/pr. Oslo).

Hylleraas, Egil A. and Aadne Ore: Binding energy of the positronium molecule. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 71*, 493—496 (1947).

Ore, Aadne: Structure of the quadreelectron. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 71*, 913—914 (1947).

Die Berechnung der Energie eines Systems von 4 Teilchen läßt sich vereinfachen, wenn das System eine gewisse Symmetrie aufweist. Diese Vereinfachung wird dann benutzt, um mit Hilfe der Variationsrechnung den Grundzustand des Positroniummoleküls zu berechnen, dessen Hamiltonfunktion symmetrisch ist gegenüber Vertauschung der beiden Elektronen oder der Positronen miteinander. Es ergibt sich Stabilität gegenüber Dissoziation in 2 Positroniumatome. — In der 2. Notiz konnte Ore durch Verwendung einer dreiparametrischen Variationsfunktion den gefundenen Näherungswert weiter verbessern. *Romberg (Blindern/pr. Oslo).*

Huang, Su-Shu: The variational method for the continuous wave function of an electron in the field of a neutral atom. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 75*, 980—981 (1949).

Hulthéns Variationsmethode zur Berechnung der Streuphasen wird der Streuung von Elektronen am neutralen Atom angepaßt.

Romberg.

Hamilton, Donald R.: Polarization and direction of propagation of successive quanta. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 74*, 782—788 (1948).

Geht ein System von einem Quantenzustand über einen Zwischenzustand unter Emission zweier aufeinander folgender Quanten in einen Endzustand über, so sind diese beiden Quanten in ihrer Emissions- und Polarisationsrichtung nicht ganz unabhängig voneinander. Verf. untersucht nun speziell die Korrelation zwischen der Fortschrittsrichtung des ersten und der Polarisationsrichtung des

zweiten Quants, zeigt den Zusammenhang auf zwischen dieser Korrelation und der zwischen den beiden Fortschreitungsrichtungen und diskutiert sie sowohl für den Fall von Dipol- wie von Quadrupolstrahlung. *F. Sauter* (Göttingen).

Karplus, Robert und Julian Schwinger: A note on saturation in microwave spectroscopy. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 73, 1020—1026* (1948).

In Form einer Neufassung der Untersuchungen von van Vleck und Weißkopf über die Breite von Absorptionslinien wird die strenge quantenmechanische Theorie auf den Fall hoher eingestrahelter Lichtintensitäten erweitert. Es ergibt sich dabei für den Absorptionskoeffizienten die experimentell durchaus bekannte Sättigungserscheinung. Eine besondere Bezugnahme auf die Ultrakurzwellen-Spektroskopie besteht nicht, vielmehr sind die Rechnungen der Verf. gültig für jegliche Art elektromagnetischer Strahlung. *F. Sauter* (Göttingen).

Karplus, Robert: Frequency modulation in microwave spectroscopy. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 73, 1027—1034* (1948).

In Fortführung der vorstehend referierten Arbeit werden die Rechnungen auch auf den Fall erweitert, daß die Primärwelle frequenzmoduliert ist. *F. Sauter*.

Hill, E. L.: On the kinematics of uniformly accelerated motions and classical electromagnetic theory. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 72, 143—149* (1947).

Verf. definiert: Ein Teilchen ist gleichförmig beschleunigt, wenn die zeitliche Änderung der Beschleunigung in einem augenblicklichen Ruhssystem verschwindet. Die Bahnen im r - t -Raum sind dann gleichseitige Hyperbeln, die asymptotisch an den Lichtkegel gehen. (Dieser Bahntyp ist geläufig für die relativistische Bewegung einer Masse in einem homogenen Kräftefeld, die nach des Verf. Definition gerade gleichförmig beschleunigt wird.) Es ist die Batemansche 15-parametrische Gruppe der Kugelverwandtschaften im Minkowskiraum, die diese Hyperbelbahnen ineinander transformiert. Durch eine solche konforme Transformation kann also ein gleichförmig beschleunigtes Teilchen auf Beschleunigung Null transformiert werden. — Der in der klassischen Theorie der Strahlungsrückwirkung wichtige Abrahamsche Vierervektor ist die einfachste kinematische Invariante der konformen Gruppe, er verschwindet für gleichförmig beschleunigte Bewegung. Verf. vermutet, daß diese Bewegung überhaupt strahlungsfrei sei, wie es nach Pauli für den eindimensionalen Fall sicher sein soll, und erwähnt, das Coulombfeld einer gleichförmig beschleunigten Ladung ergebe sich durch konforme Transformation ebenso, wie man es nach den üblichen Retardierungsmethoden erhält. Einer bei der Korrektur eingefügten Fußnote nach sind diese Punkte noch der Überprüfung bedürftig. Auf mögliche Nutzenwendungen in der Dirac-Eliezerschen klassischen Theorie des Elektrons ist hingewiesen. *Bauer* (München).

Papapetrou, A.: Non-symmetric stress-energy-momentum tensor and spin-density. *Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, London, VII. S. 40, 937—946* (1949).

Für ein klassisches ideales Gas aus punktförmigen Teilchen mit Spin (wie etwa die Teilchen mit Masse und Massendipol von Hönl und Papapetrou, dies. Zbl. 21, 86; 22, 176; 23, 430) wird der Tensor T^{ik} der Dichte des Impulsstromes aufgestellt. Er ist nur symmetrisch, wenn Impuls und Geschwindigkeit proportional sind. Sein antisymmetrischer Anteil hängt mit dem Tensor (dritter Stufe) der Drehimpulsdichte zusammen. Beide Tensoren haben enge Beziehungen zu den entsprechenden Größen der Diracschen Theorie des Elektrons. *F. Hund*.

Snyder, Hartland S.: On the external polarization of the vacuum. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 75, 1623* (1949).

Verf. untersucht die Polarisation des Diracschen Vakuums durch ein äußeres elektromagnetisches Feld. Durch Betrachtung der Lösungen der Dirac-Gleichung, die zur Zeit $t = t_0$ in die Lösungen der ungestörten Gleichung übergehen, wird mit Hilfe des Formalismus der Wellenquantelung gezeigt, daß die Erwartungswerte für Strom und Dichte selbst nach Einschaltung des Feldes identisch verschwinden, vorausgesetzt, daß sie zur Zeit $t = t_0$ Null waren. *Touschek* (Glasgow).

Critchfield, Charles L.: Electron waves in the magnetic dipole field of a neutron. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 71*, 258—267 (1947).

Es werden die Lösungen der Diracschen relativistischen Wellengleichung in dem statischen Feld eines magnetischen Dipols untersucht, der als einzigen Freiheitsgrad die Möglichkeit einer Umkehr seiner Spinrichtung besitzt. Dies entspricht etwa den Verhältnissen bei der Bewegung eines Elektrons oder eines Positrons im Feld eines Neutrons. Es ergeben sich dabei in letzterem Fall (Positron) außer einem kontinuierlichen System von Zuständen, wie beim Elektron-Neutron-Problem, noch diskrete Zustände mit starker Bindungsenergie und einem mittleren Positron-Neutron-Abstand von der Größe $e^2/Mc^2 \approx 10^{-16}$ cm; dabei bedeutet M die im magnetischen Moment des Neutrons enthaltene Neutronenmasse.

F. Sauter (Göttingen).

Ore, A. and J. L. Powell: Three-photon annihilation of an electron-positron pair. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 75*, 1696—1699 (1949).

Die Vernichtung eines Elektron-Positron-Paares durch gleichzeitige Emission von drei Lichtquanten wird für kleine Relativgeschwindigkeiten des Paares untersucht. Es zeigt sich, daß der Zwei-Quanten-Prozeß etwa 370mal häufiger ist, als der Drei-Quanten-Prozeß. Für den Fall des Grundzustandes des Positroniums (eines aus Positron und Elektron aufgebauten „Wasserstoffatoms“) ergibt sich eine Lebensdauer von $1,4 \times 10^{-7}$ sec. Die Zwei-Quanten-Vernichtung ist in diesem Fall verboten.

Touschek (Glasgow).

Thibaud, Jean: L'incertitude dans la détermination des moments magnétiques particuliers. *C. r. Acad. Sci., Paris 226*, 482—484 (1948).

Verf. weist nach, daß das Pauli-Bohrsche Argument, beim freien Elektron wäre das magnetische Moment mit klassischen Experimenten wegen der Unschärferelation nicht nachweisbar, für Teilchen mit hinreichend kleiner Ruhmasse in extrem-relativistischen Fällen nicht mehr stichhaltig ist. Für das vom Verf. vermutete, Elektrino genannte Teilchen mit einer Ruhmasse von ungefähr 10^{-38} g und $\eta = 1/\sqrt{1-\beta^2} \approx 10^7$ müßte das magnetische Moment feststellbar sein. *Bauer*.

Frenkel, Ja. I.: Der Begriff der Bewegung in der relativistischen Quantentheorie. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 64*, 507—509 (1949) [Russisch].

Verf. möchte das Augenmerk auf den Umstand lenken, daß die in der Quantentheorie der Wellenfelder vorkommende Teilchenerzeugung und -Vernichtung zur Erklärung der Fortbewegung dienen kann. Ein Teilchen bewegt sich, indem es an einer Stelle verschwindet und an einer anderen neu entsteht. Beim Elektron wird das bewirkt durch das Auftreten eines virtuellen Elektron-Positronpaares, wobei sich das ursprüngliche Elektron mit dem Positron vereinigt. Dadurch und, was Verf. nicht erwähnt, vielleicht auch noch durch Lichtquanten Emission und Reabsorption kann auch die Zitterbewegung zustande kommen. Beim Photon, wo der klassische Bewegungsbegriff ohnehin versagt, ist die Bewegung Emission an einer und Absorption an einer anderen Stelle. Die Bewegung auf dem Lichtkegel wird dabei nicht beschrieben. Um ein solches Programm durchzuführen, läßt Verf. die korpuskulare Vorstellung gänzlich fallen und schlägt die Einführung eines „quantendynamischen Feldes“ vor, das Träger aller mechanischer Eigenkraft ist, die den Teilchen zugeschrieben wird: Energie, Impuls, Spin. Die Teilchen sind nur probe Modelle zur Veranschaulichung der Quanteneffekte des Feldes. Danach erscheint es dem Verf. nicht verwunderlich, daß für die Teilchennäherung die Unschärferelation gilt. Für das „quantendynamische“ Feld braucht aber Determiniertheit und Kausalität nicht verletzt zu sein. *Bauer* (München).

Hull, T. E. and L. Infeld: The factorization method, hydrogen intensities, and related problems. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 74*, 905—909 (1948).

Bei Infelds Faktorisationsmethode wird der lineare Differentialoperator 2. Ordnung aufgespalten in zwei Differentialoperatoren erster Ordnung, aber so,

daß der eine Operator die Quantenzahl um eins erhöht, der andere um 1 erniedrigt. Dann ergeben sich die Eigenwerte sehr einfach durch Anwendung dieser Operatoren. [Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 59, 737—747, 841—842 (1941); dies. Zbl. 25, 50 und Trans. R. Soc. Canada, III. S. 36, 7—18 (1942)]. — Hier werden jetzt diese linearen Operatoren benutzt, um Rekursionsformeln für die Matrixelemente aufzustellen, und zwar für die Intensitäten des H-Atoms. Das Ausgangsmatrixelement wird mit Hilfe der Laplace-Transformation berechnet. So ergeben sich sehr einfach die bekannten diskret-diskreten und die diskret-kontinuierlichen Übergangswahrscheinlichkeiten des H-Atoms. Romberg (Blindern/pr. Oslo).

Wet, J. S. de: On the relativistic invariance of quantized field theories. Proc. R. Soc., London, A 195, 365—367 (1948).

In einer vorausgehenden Arbeit (dies Zbl. 31, 190) gab Verf. eine gegenüber der ersten Darstellung von Chang viel durchsichtigere Methode an, den kanonischen Formalismus und damit die Quantisierung durchzuführen im Falle von Lagrange-dichten, die höhere Ableitungen enthalten. Die Quantisierung ist nicht nur speziell-relativistisch invariant, sondern, wie Verf. in der vorliegenden Arbeit unter Benützung einer von Weiß herrührenden Definition verallgemeinerter Poisson-Klammern zeigt, auch gegenüber allgemeinen Koordinatentransformationen (allgemein-relativistisch) invariant. Bauer (München).

Isacker, J. van: Sur la construction de tenseurs symétriques d'impulsion-énergie dépendants de spineurs. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 451—456 (1949).

Bei Zugrundelegung einer Lagrange-funktion, die von „Spinoren“ ψ^a und ihren Ableitungen beliebiger Ordnung abhängt, läßt sich in sehr allgemeiner Weise ein symmetrischer Tensor bilden, der bei Abwesenheit äußerer Kräfte divergenzfrei ist. Die Hamiltonfunktion hängt mit der 44-Komponente dieses Tensors zusammen. F. Hund (Jena).

Jehle, Herbert: Two-component wave equations. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 75, 1609 (1949).

Eine Gleichung für eine zweikomponentige Größe ψ , die bei Abwesenheit elektromagnetischer Felder durch Iteration die gewöhnliche Wellengleichung liefert, ist

$$\gamma^\kappa (\partial/\partial x^\kappa - iq_\kappa) \psi = \mu \psi^*, \quad \gamma^{**} \gamma^\lambda + \gamma^{\lambda*} \gamma^* = -2g^{\lambda*}.$$

Es gibt zwei Darstellungen der γ durch zweireihige Matrizen, die Teilchen mit positiver und negativer elektrischer Ladung entsprechen. F. Hund (Jena).

Falk, Gottfried u. Hans Marshall: Das Schrödinger-Wellenfeld. Z. Naturforsch. 4a, 131—136 (1949).

Die Schrödingergleichung kann als nichtrelativistischer Grenzfall eines durch die Feldskalare ψ und ψ^* beschriebenen Wellenfeldes aus der allgemeinen Theorie der Wellenfelder hergeleitet werden [Heisenberg und Pauli, Z. Physik 56, 1—61 (1929); Wentzel, Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder, Wien 1943; dies. Zbl. 28, 380]. Verff. diskutieren Energiedichte, Energiestromdichte, Impulsdichte und Spannungstensor des entstehenden Schrödinger-Wellenfeldes und behandeln die Erhaltungssätze. Der Spannungstensor wird für die Beispiele des eindimensionalen Potentialkastens und des H-Atoms näher untersucht. Kockel.

Lewis, H. W.: On the reactive terms in quantum electrodynamics. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 73, 173—176 (1948).

Die Entdeckung der Feinstruktur-Anomalie des Wasserstoffs durch Lamb und Retherford [Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 72, 241 (1947)] — einer Verschiebung des 2s-Terms um etwa 1000 MHz — ist von Bethe in nichtrelativistischer Rechnung auf die Wechselwirkung des Wasserstoff-Elektrons mit den Nullpunktschwingungen des Vakuums zurückgeführt worden (dies. Zbl. 30, 424). Diese Wechselwirkung gibt bekanntlich Anlaß zu einer logarithmisch divergierenden Selbstenergie des freien Elektrons. Es zeigt sich jedoch, daß die Differenz zwischen

der Selbstenergie eines freien und eines im Coulombfeld gebundenen Elektrons endlich ist und für s -Terme gerade der von Lamb und Retherford gemessenen Term-Anomalie entspricht. Die Schwierigkeit der Selbstenergie-Überlegungen liegt in der Unterscheidung von Massentermen (inertial terms), die gewöhnlich divergent sind, und den ihnen überlagerten Wechselwirkungstermen (reactive terms), die endlich sein können. Die Lamb-Verschiebung erscheint somit als die endliche Differenz zweier divergierender Ausdrücke: der totalen Selbstenergie eines gebundenen Elektrons und der Selbstenergie eines freien Elektrons. Die Wechselwirkung mit den Nullpunkts-Schwingungen des Maxwellschen Vakuums sollte auch zu Korrekturen des Streuquerschnittes für Elektronen in einem äußeren Felde führen. Auch hier ergibt sich zunächst ein logarithmisch divergierendes Resultat. Verf. zeigt nun, daß sich diese Divergenz eliminieren läßt, wenn man die Massenterme in Abzug bringt. Diese sind in relativistischer Rechnung leicht erkenntlich, da sie den Diracschen β -Operator als Faktor enthalten. Nach Subtraktion der trivialen Massenterme (die darauf beruhen, daß die Störungsrechnung so angesetzt ist, als ob das Elektron keine elektromagnetische Masse hätte) ergibt sich das endliche Resultat

$$\delta d\sigma = \frac{2\alpha}{3\pi} \frac{(\delta P)^2}{m^2 c^2} d\sigma \ln \frac{k m c^2}{T}$$

($d\sigma$ = Änderung des differentiellen Wirkungsquerschnittes $d\sigma$, $\alpha = \frac{1}{137}$, δP = an den Kern übertragenes Moment, $k \sim 1$, T = kinetische Energie des Elektrons). Diese Korrektur ist im allgemeinen sehr klein (etwa 1%), besonders dort, wo der differentielle Wirkungsquerschnitt groß ist. Die Methode des Verf. gestattet auch die Behandlung der Wechselwirkungs-Korrektur in komplizierten Vorgängen (Bremsstrahlung, Compton-Effekt).
Touschek (Glasgow).

Epstein, Saul T.: Remarks on H. W. Lewis' paper „On the reactive terms in quantum electrodynamics“. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 73, 177 (1948).

Im Zusammenhang mit einer Untersuchung von Lewis (s. vorsteh. Referat) wird eine einfache Vorschrift zur Elimination der divergenten Massenterme aus den Ausdrücken für die Wirkungsquerschnitte der elektromagnetischen Grundprozesse hingewiesen. Von den divergenten Korrekturen, die sich aus den höheren Näherungen ergeben, hat man den gleichfalls divergenten Ausdruck $\frac{\partial \sigma}{\partial m} \delta m$ zu subtrahieren (σ = Wirkungsquerschnitt, m = Masse des Elektrons). δm ist die divergente Selbstenergie des Elektrons. Die Differenz ist endlich und ergibt die gewünschte Strahlungskorrektur.
Touschek (Glasgow).

Proca, Alexandre: Sur la transmutation des particules élémentaires. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 298—300 (1949).

Zur Darstellung des Spins wird neben dem Ortsraum mit den kanonischen Variablen x_e, p_e eines Elementarteilchens noch ein gleichgebauter Spinraum mit den kanonischen (der Vertauschungsregel unterworfenen) Variablen ξ_e, η_e eingeführt und die Wellengleichung

$$\{\Sigma(p_e + \lambda \eta_e)^2 + m_0 c^2\} \varphi = 0$$

aufgestellt. In nichtrelativistischer Näherung bleibt $x_i p_k - x_k p_i + (\xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i)$ während der Bewegung konstant. Funktionen $\varphi = \varphi_e(x) \xi_e$ entsprechen Spin 1; Funktionen $\varphi = \varphi_{e\sigma}(x) \xi_e \xi_\sigma$ ($\varphi_{e\sigma} = 0$) entsprechen Spin 2. F. Hund (Jena).

Kwal, Bernard: Les champs potentiels et la transformation de jauge généralisée en théorie de corpuscules à spin. J. Physique Radium, VIII. S. 10, 189—194 (1949).

Verf. diskutiert die üblichen Wellengleichungen für Spinteilchen ($\frac{1}{2}$, 1 und höher), wenn die Wellenfunktionen Quellen besitzen, und führt in allgemeiner Weise Potentiale der Wellenfunktionen und Eichtransformationen 2. Art ein. — Dabei haben Quellenfeld, Wellenfeld, Potentialfeld und erzeugendes Feld der Eichtransformationen stets die gleiche Komponentenanzahl (homologe Felder). Insbesondere:

Das „Potential“ in der Mesonentheorie hat nichts mit echtem Potential zu tun. Zur echten Beschreibung des Spin-1-Teilchens sind 10 Komponenten notwendig. — Verf. vermutet, daß Photonen- und Mesonentheorie auf dem Studium der Quellen- und Potentialfelder aufgebaut sein müßten, wenn man erst das Quellenfeld kennt, das von Elektron oder Nukleon erzeugt wird. *Bauer (München).*

Potier, Robert: Sur les propriétés du champ mésonique. C. r. Acad. Sci., Paris 226, 1690—1692 (1948).

Es wird eine Lagrangefunktion angegeben, aus der die vom Verf. früher diskutierten Wellengleichungen für Teilchen vom Maximalspin 1 und mit mehrfachen Massen resultieren. Die Hamiltonfunktion für die Wechselwirkung zweier Nukleonen, deren Quanten die Quellen des obigen Mesonenfeldes sind, ist in üblicher Weise ausgerechnet. *Bauer (München).*

Marshak, R. E. and A. S. Wightman: The absorption of negative π -mesons by protons. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 114—117 (1949).

Les AA. calculent la probabilité pour unité de temps pour l'absorption directe par un proton, d'un méson π^- donnant lieu à l'émission d'un photon de grande énergie, ou d'un méson π^0 , en se limitant au cas des mésons de spin 0, scalaires et pseudoscalaires. Inversement on obtient immédiatement les sections efficaces de production des mésons π^- de spin 0 par des rayons γ ou des neutrons. La discussion des résultats obtenus montre que les vies moyennes des états liés du méson sont très courtes devant la vie moyenne de transformation en méson μ . Il semble que le plus grand nombre des mésons π^- atteignant l'orbite la plus basse de l'atome d'hydrogène mésique sera absorbé et ne se transformera pas en méson μ^- .

G. Petiau (Paris).

Taketani, Mituo, Seitaro Nakamura, Kenichi Ono and Munco Sasaki: On the two-meson theory. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 60—63 (1949).

Les AA. comparent et discutent en utilisant les résultats des expériences de Bristol et de Berkeley sur les mésons π et μ , les théories des forces nucléaires proposées successivement par Sakata, Tanikawa, Inoue, Nakamura en 1942 [Progr. theor. Phys. 1, 143 (1946)] et par Marshak et Bethe [Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 72, 306 (1947)]. Ces théories introduisent toutes deux un méson lourd et un méson léger, mais tandis que Marshak et Bethe proposent pour les forces nucléaires une théorie de paires, Sakata considère des potentiels nucléaires du type de Yukawa. La discussion des résultats expérimentaux sur l'absorption des mésons π par les noyaux et sur la désintégration nucléaire par absorption de méson μ semble plus favorable à la théorie de Sakata qu'à celle de Bethe et Marshak. Discutant la théorie du deuteron, les AA. montrent que les difficultés rencontrées jusqu'ici ne peuvent être écartées par la théorie du méson π et suggèrent la considération d'un mélange de champs dans lequel interviendrait un troisième méson plus lourd que le méson π . L'analyse des conditions dans lesquelles on peut estimer les vies moyennes conduit les AA. à exclure une théorie pseudoscalaire pour le méson π et leur permet de proposer un classement des couplages acceptables pour la représentation des interactions entre mésons π et μ et particules légères.

G. Petiau (Paris).

Schiff, L. I.: Radiation accompanying meson creation. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 89—93 (1949).

L'A. évalue l'intensité et les caractères de l'émission électromagnétique qui semble devoir accompagner la création des mésons chargés dans les chocs nucléon-nucléon en considérant successivement les cas des mésons de spin \hbar , 0 ou $\hbar/2$ possédant un moment magnétique normal. Les mésons de spin \hbar ou 0 sont représentés par des solutions des équations de Gunn. Les calculs ne se simplifient que dans les cas limites où l'énergie initiale du méson est soit voisine de mc^2 , soit grande par rapport à mc^2 et conduisent à des catastrophes infra-rouges. Le rapport de l'énergie

rayonnée à l'énergie initiale du méson qui croît logarithmiquement pour des mésons de grande énergie dans le cas des spins 0 et $\hbar/2$ est de l'ordre de 1 pour cent pour les rayons cosmiques de très grande énergie. Pour les mésons vectoriels ce rapport est de la forme $(11\alpha/4860\pi)(E/mc^2)^4$ (α constante de structure fine, E et m énergie initiale et masse au repos du méson dans le système de référence pour lequel le centre de gravité des nucléons entrant en collision est au repos). Ces résultats semblent favorables à l'attribution du spin \hbar au méson π . *G. Petiau* (Paris).

Urban, Paul: Über die Entstehung und Vernichtung von Mesonen beim Durchgang durch Materie. *Acta physica Austriaca* 1, 55—73 (1947).

Der Wirkungsquerschnitt für die Entstehung und Vernichtung von vektoriellen Mesonen in Wechselwirkung mit Materie wird nach der Bornschen Näherung berechnet. Die gefundenen Wirkungsquerschnitte weichen wesentlich von früher berechneten Werten ab. Die neuen Berechnungen sind mit der Annahme verträglich, daß die Mesonen in der Atmosphäre durch Photonen erzeugt werden. Die Wahrscheinlichkeit für die Erzeugung eines Mesons ist etwa 1/50 der Wahrscheinlichkeit für die Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares. *Touschek* (Glasgow).

Ashkin, J. and R. E. Marshak: Bremsstrahlung in high energy nucleon-nucleon collisions. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S.* 76, 58—60 (1949).

Calcul des sections efficaces différentielles pour l'émission d'un spectre continu γ produit par bremsstrahlung dans les chocs proton-neutron, proton-proton et neutron-neutron. Les AA. utilisent en se plaçant au point de vue non relativiste l'approximation de Born et ne considèrent pour les nucléons incidents que des énergies inférieures au seuil de production des mésons π (soit 290 MeV). Le potentiel nucléaire, déduit d'expériences de Berkeley sur la diffusion neutron-proton à 90 MeV s'écrit $V(r) = \frac{1}{2}(1 + P_M)g_i e^{-\lambda_i r}/r$ où P_M est l'opérateur de Majorana, $\lambda_i^{-1} = 1,18 \cdot 10^{-13}$ cm, $g_1 = 0,280 \hbar c$, $g_3 = 0,404 \hbar c$ se rapportent respectivement aux états singulet et triplet. La comparaison dans le cas du choc $N - P$ des sections efficaces dues aux émissions électriques et magnétiques montre que ces dernières ne représentent que quelques pour cent des premières. Le calcul de la section efficace totale pour $E_0 = 250$ MeV (protons du cyclotron de Rochester) pour des γ d'énergie comprise entre $E_0/4$ et $E_0/2$ dans le système du centre de gravité (dans le système du laboratoire: 85—170 MeV, pour les γ émis vers l'avant, 45—90 MeV pour les γ émis vers l'arrière) on trouve $\sigma^{NP} = 0,28 \cdot 10^{-29}$ cm², $\sigma^{PP} = 0,23 \cdot 10^{-29}$ cm² et $\sigma^{NN} = 0,038 \cdot 10^{-29}$ cm². *G. Petiau* (Paris).

Bau der Materie:

Bohr, Niels: The penetration of atomic particles through matter. *Danske Vid. Selsk. mat.-fysiske Medd.* 18, Nr. 8, 144 S. (1948).

Dieser sehr lesenswerte Bericht stellt eine Zusammenfassung und kritische Überprüfung der zahlreichen theoretischen Arbeiten über den Zusammenstoß von Teilchen mit Materie (Atomen bzw. Atomkernen) und über den Durchgang durch dieselbe dar. Es werden u. a. untersucht: Die elastische Streuung geladener Teilchen im reinen und im abgeschirmten Coulombfeld. Der Einfluß dieser Kernfelder auf die Bremsung eines Strahls aus geladenen Teilchen. Die Anregung und Ionisierung der bei einem Zusammenstoß getroffenen Atome. Die Umladungseffekte an den Strahlteilchen bei solchen Zusammenstößen. Der Zusammenhang zwischen Reichweite und Geschwindigkeit der Strahlteilchen. *F. Sauter*.

Bohr, Aage: Atomic interaction in penetration phenomena. *Danske Vid. Selsk., mat.-fysiske Medd.* 24, Nr. 19, 52 S. (1948).

In der ursprünglichen Theorie des Durchganges von Korpuskularstrahlung durch Materie waren die von den Strahlteilchen getroffenen Atome als voneinander völlig unabhängige Gebilde angesehen worden. Erst Swann (1938) und Fermi (1939) haben darauf hingewiesen, bzw. gezeigt, daß zwischen den einzelnen ge-

getroffenen Atomen irgendwelche Phasenbeziehungen bestehen und daß diese Beziehungen eine zusätzliche Bremswirkung zur Folge haben. Bei der rechnerischen Ermittlung dieser Wirkung wurde allerdings die durchstrahlte Materie makroskopisch, d. h. als Kontinuum behandelt. Hier setzt die Arbeit des Verf. ein, der die Materie nun wirklich atomar behandelt und daher die Wechselwirkung der verschiedenen getroffenen Atome zu berücksichtigen hat. Es ergeben sich jedoch bei dieser Behandlung im wesentlichen die gleichen Resultate wie bei der makroskopischen Betrachtungsweise.

F. Sauter (Göttingen).

Kohler, Max: Magnetische Widerstandsänderung und Leitfähigkeitstypen. I, II. Ann. Physik, VI. S. 5, 89—98, 99—107 (1949).

Nach E. Justi lassen sich die elektrischen Leiter entsprechend ihrem Verhalten im Magnetfeld in zwei Typen einteilen. Die (in der Hauptsache einwertigen) Metalle des ersten Leitfähigkeitstyps führen bei der Ermittlung der elektrischen Widerstandsänderung in einem transversalen Magnetfeld H im Grenzfall hoher H -Werte zu einem konstanten Zusatzwiderstand während, bei den übrigen (vorwiegend zweiwertigen) Metallen der Zusatzwiderstand für große H proportional zu H^2 anwächst, ohne eine Sättigung zu erreichen. Verf. unternimmt es nun, dieses Verhalten, dessen Ursache für spezielle Fälle bereits geklärt ist, für beide Gruppen von Metallen von möglichst einheitlichem Standpunkt aus zu behandeln. Dabei wird H so groß angenommen, daß man in erster Näherung von der Wirkung der Stöße der Leitungselektronen gegen das Gitter absehen kann. — In der ersten Arbeit, die sich mit den zweiwertigen Metallen beschäftigt, wird gezeigt, daß hier die Stromkomponente senkrecht zu den beiden Feldstärken in erster Näherung verschwindet. Daher hat man bei der üblichen Definition der Leitfähigkeit aus dem Quotienten des Stromquadrates und der Stromleistung im elektrischen Feld im Zähler wie im Nenner mit den Stromkomponenten in zweiter Näherung zu rechnen, so daß die Leitfähigkeit, da diese Stromkomponenten entsprechend dem Näherungsverfahren proportional $1/H^2$ sind, selbst verkehrt proportional zu H^2 geht. Das Verschwinden des Stromes in erster Näherung bei zweiwertigen Metallen ist dabei eine Folge des Bändermodells und ergibt sich, anschaulich gesprochen, durch die völlige Kompensation des Beitrages der Elektronenleitung im oberen Band durch die „Löcherleitung“ im unteren Band. — Im zweiten Teil werden die Verhältnisse bei einwertigen Metallen nach dem gleichen Verfahren untersucht. Hier verschwindet der Strom in erster Näherung nicht, wohl aber die Stromleistung, da ja in erster Näherung elektrisches Feld und Strom aufeinander senkrecht stehen. Man erhält daher für extrem große H -Werte einen endlichen Grenzwert der Leitfähigkeit, der übrigens bei guten Leitern, bei denen die Grenzenergiefläche die Brillouinschen Zonen nicht erreicht, isotrop ist. Der Hallkoeffizient wird hier gleich dem für freie Elektronen. — Durch eine Abschätzung will Verf. übrigens zeigen, daß die longitudinale Widerstandsänderung höchstens gleich der transversalen sein kann. Allerdings sieht man hier nicht recht die Berechtigung des vom Verf. eingeschlagenen Weges ein; denn im Fall, daß elektrisches und magnetisches Feld parallel stehen, darf man wohl kaum in erster Näherung von der bremsenden Wechselwirkung mit dem Gitter absehen.

F. Sauter (Göttingen).

Mataré, H. F.: Statistische Schwankungen in Halbleitern. Z. Naturf. 4a, 275—283 (1949).

Verf. behandelt die bei Halbleitern auftretenden statistischen Spannungsschwankungen in Analogie zu den bei Dioden auftretenden Rauschströmen. Er stellt fest, daß eine Diodenkennlinie dem experimentellen Befund besser angepaßt ist als eine Exponentialkennlinie. Aus dem der Rechnung zugrunde gelegten Ersatzbild des Halbleiters — Diode mit Parallel-Widerstand und -Kapazität und Bahnwiderstand — wird das mittlere Rauschspannungsquadrat abgeleitet. Die als Parameter eingehende Rauschtemperatur der Randschicht wird durch Messungen an Dioden und Halbleitern gewonnen.

Mann (München).

Bhatia, A. B. and Sir K. S. Krishnan: „Diffuse scattering“ of the Fermi electrons in monovalent metals in relation to their electrical resistivities. Proc. R. Soc., London, A 194, 185—205 (1948).

Der elektrische Widerstand eines Metalls im Bereich gewöhnlicher Temperaturen ist durch eine freie Weglänge der Elektronen bestimmt, die durch deren Streuung an den Atomen begrenzt ist. Sie kann durch Atomdichte, Temperatur, Kompressibilität und einen Streuquerschnitt ausgedrückt werden. Ein numerischer Faktor wird unter Benutzung empirischer Daten für den Atomformfaktor und den Strukturfaktor für den Na-Kristall ausgerechnet.

F. Hund (Jena).

Nicolson, M. M.: The interaction between floating particles. Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 288—295 (1949).

Im Zusammenhang mit dem Bragg'schen Blasenmodell für Kristallgitter wird das hydrodynamische Kraftgesetz zwischen zwei auf einer Flüssigkeit schwimmenden Blasen aus der Gleichgewichtsbedingung zwischen hydrostatischem Auftrieb und Oberflächenspannung berechnet. Mit den Näherungsannahmen, daß der Neigungswinkel der Wasseroberfläche klein und der eingetauchte Blasenteil kugelförmig ist, ergibt sich eine Abhängigkeit von potentieller Energie und Blasenabstand, die derjenigen idealer Gasatome sehr ähnlich ist. *Pretsch.*

Frank, F. C. and J. H. van der Merwe: One-dimensional dislocations. I. Static theory. Proc. R. Soc., London, A 198, 205—216 (1949).

In Erweiterung der Theorien von Dehlinger und Frenkel und Kontorova wird folgendes eindimensionale Modell zugrunde gelegt: Auf eine Anzahl von Atomen in einer geraden Linie, auf welche sich ihre Bewegung beschränkt, wirken linear mit der Entfernung vom Abstand b anwachsende Kräfte (Proportionalitätsfaktor μ) und ein periodisches, als sinusförmig angenommenes Potential mit der Amplitude $W/2$ und der Periode a . Die statischen Gleichgewichtsbedingungen führen dann nach einer Taylorentwicklung der relativen Verschiebung $\xi_n = \Delta x_n/a$ des n -ten Atoms in erster Näherung auf die Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{d^2 \xi}{dn^2} = \frac{\pi}{2l_0} \sin 2\pi \xi \quad (l_0 = \sqrt{\mu a^2/2W}),$$

deren Lösung lautet:

$$(2) \quad \xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(\pi n/l_0 k) \quad \left(k^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 l_0^2}\right)$$

$$(2a) \quad \rightarrow \frac{2}{\pi} \arctg e^{\pi n/l_0 k} \text{ für } k \rightarrow 1.$$

ε ist eine Integrationskonstante. (2a) stellt die Frenkelsche Lösung für eine einzige Versetzung dar, l_0 ist ein Maß für ihre Größe. Die allgemeine Lösung (2) gibt eine Reihe von Versetzungen an. Mit Hilfe dieser Lösung werden die Energie einer Versetzung, die Änderung der Gesamtenergie bei der Bildung und Auflösung einer Versetzung und die zu diesen Vorgängen erforderliche Aktivierungsenergie berechnet und die Stabilitätsgrenzen bezüglich spontaner Bildung und Auflösung angegeben. Als Anwendung wird eine Atomlage (Insel) auf einer Kristalloberfläche betrachtet (vgl. das folgende Referat). Dabei können Versetzungen der betrachteten Art sowohl in den Kanten der Lage bezüglich ihres Inneren (Fall I) als auch der Lage bezüglich des Trägerkristalls (Fall II) auftreten. a bzw. b sind im Fall I gleich der Gitterkonstanten der ungestörten Lage bzw. einer isolierten Kante, im Fall II gleich der Gitterkonstanten der Kristallunterlage bzw. der ungestörten Lage. Diese Größen werden nach Lennard-Jones [Proc. phys. Soc. London 52, 38—53 (1940)] für kubische dichteste Kugelpackungen berechnet. Zahlenmäßig ergeben sich damit für $q_0 = a/(b-a)$ die Werte 145 im Fall I und 55 im Fall II. In beiden Fällen wird $l_0 \sim 7$. Die Energie einer Versetzung beträgt dann im Fall I etwa das 0,7-fache der Verdampfungswärme pro Atom, so daß solche Versetzungen in genügender Zahl thermisch gebildet werden können. Im Fall II handelt es sich um (als geradlinig angenommene) Versetzungslinien, deren Energie pro Atom von derselben Größe ist wie oben, deren Gesamtenergie aber proportional zu ihrer Länge anwächst, so daß es nach Ansicht der Verf. fraglich ist, ob sie thermisch gebildet werden können. Auf die Anwendung der Ergebnisse auf andere Vorgänge, z. B. die Zwillingsbildung, wird hingewiesen. *A. Kochendörfer (Stuttgart).*

Frank, F. C. and J. H. van der Merwe: One-dimensional dislocations. II. Misfitting monolayers and oriented overgrowth. Proc. R. Soc., London, A 198, 216—225 (1949).

Die Ergebnisse von Teil I (s. vorsteh. Ref.) werden auf den Fall einer monoatomaren Lage auf der Oberfläche eines Trägerkristalls angewendet, besonders, wenn die natürlichen Gitterkonstanten beider verschieden voneinander sind. Es wird begründet, daß die für eindimensionale Versetzungen erhaltenen Gleichungen auf diesen zweidimensionalen Fall angewendet werden können. Die Theorie ergibt einen gewissen kritischen Betrag der Fehllagen, der für ein einfaches Beispiel zu etwa 9% abgeschätzt wird, unterhalb dessen die Atomschicht in ihrem tiefsten Energiezustand so deformiert wird, daß sie exakt auf die Unterlage paßt und oberhalb dessen sie im Mittel nur leicht deformiert wird, unter Ausbildung vieler Versetzungen zwischen ihr und der Unterlage. Die Adsorptionsenergie ist im zweiten Fall nahezu konstant. Bis zu einer zweiten kritischen Fehllage (etwa 14% in dem betrachteten Beispiel) kann die Schicht bei hinreichend tiefen Temperaturen einen metastabilen Zustand annehmen, in dem sie ebenfalls genau auf die Unterlage paßt. Da die Versetzungen auf der Unterlage beweglich sind, so kann ein Kristall auf einem andern nur dann genau orientiert aufwachsen, wenn die erste

monoatomare Lage vollständig unter unterkritischen Bedingungen gebildet wird, wie es auch die Erfahrung (demnächst veröffentlichte Untersuchungen von van der Merve) zeigt.

A. Kochendörfer (Stuttgart).

Eshelby, J. D.: Edge dislocations in anisotropic materials. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, London, VII. S. 40, 903—912 (1949).

J. M. Burgers hat Versetzungen, deren Achsen beliebige Kurven sind, in kubischen Gittern untersucht. Verf. erweitert die Rechnungen auf Gitter beliebiger Symmetrie, jedoch unter Beschränkung auf Stufenversetzungen, deren Achsen unendlich ausgedehnte gerade Linien sind. In diesen Fällen ist der Verformungszustand eben und die allgemeine Lösung in geschlossener Form bekannt. Die Verschiebungen in der Gleitebene parallel und senkrecht zur Gleitrichtung (x - bzw. y -Richtung) ergeben sich unter bestimmten Vereinfachungen zu

$$u = \frac{b}{2\pi} \arctg \frac{y}{x} + \frac{b}{2\pi} A_1 \frac{xy}{x^2 + y^2}; \quad v = -\frac{b}{2\pi} A_2 \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{b}{2\pi} A_3 \frac{y^2}{x^2 + y^2}.$$

Dabei bezeichnen: b die Gitterkonstante in der Gleitrichtung und A_1, A_2, A_3 Anisotropiefaktoren, die durch Verhältnisse der Elastizitätsmoduln gegeben sind. Für isotrope Stoffe wird $A_1 = -A_3 = (\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu)$, $A_2 = \mu/(\lambda + 2\mu)$, wo λ und μ die Laméschen Konstanten sind. Die Schubspannung in der Gleitebene längs der Gleitrichtung beträgt $\tau = \frac{b}{2\pi} \frac{K}{x}$. K ist ein weiterer Anisotropiefaktor, der für

isotrope Stoffe den Wert $\mu/(1 - \nu)$ annimmt (ν Poissonsches Verhältnis). Die Energie einer Versetzung in einem Kristall, der durch einen inneren und einen äußeren Zylinder mit den Radien r_0 und r_1 begrenzt ist, wird pro Längeneinheit $E = (b^2 K/4\pi) \ln(r_1/r_0)$. Zahlenmäßig ergibt sich für kubisch raumzentrierte Gitter für die Gleitsysteme (100), [010]; (110), [010] und (110), [111] E zu 6,8, 13,6 und $5,9 \cdot 10^5$ erg/cm. Eine Abschätzung der relativen Erstreckung l/b einer Versetzung ergibt in obigen Fällen die Werte 0,23, 0,55 und 0,83. Beide Ergebnisse weisen darauf hin, daß im dritten Gleitsystem das Gleiten leichter erfolgt als in den beiden ersten.

A. Kochendörfer (Stuttgart).

Freudenthal, A. M. and M. Reiner: A law of work-hardening. J. appl. Mech., New York 15, 265—273 (1948).

Auf der Grundlage der Braggschen Theorie der Streckgrenze (dies. Zbl. 32, 142), nach welcher das Gleiten in einem Kristalliten eintritt, wenn die elastische Energie dabei abnimmt, wird ein Gesetz der Verfestigung abgeleitet und an einem durch Düsenziehen bis zu 104% verformten (Durchmesserabnahme von 8 auf 0,8 mm) weichen Stahl geprüft. Es wird begründet, daß an Stelle der üblichen Variablen Spannung und Dehnung, welche die Verformungsverfestigungskurve (strain hardening curve) ergeben, skalare Invarianten, welche auf eine von der besonderen Beanspruchungsart unabhängige Kurve führen, zu benutzen sind, und zwar die zweite Invariante des elastischen Deformationstensors (als Maß für die Spannung) und die elastische Verformungsarbeit W , welche durch die zweite Invariante des plastischen Deformationstensors bestimmt ist (als Maß für die Verformung). Die so bestimmte Kurve $I = f(W)$ wird als Arbeitsverfestigungskurve (work hardening curve) bezeichnet. Es wird nun angenommen, daß durch die Verformung die ursprünglichen Kristallite unterteilt werden (jeweilige Größe t), aber nur bis zu einer bestimmten Endgröße t_e . Die Ergebnisse von Bragg führen auf Beziehungen zwischen der Änderung von I und derjenigen der Kristallbereiche für die verschiedenen t , sowie zwischen letzteren und der von W . Die unter plausiblen Annahmen durchgeführte Integration ergibt die gesuchte Funktion $I = f(W)$. Im einfachsten Falle einheitlicher Kristallitgröße t nimmt diese die Form $I = I_\infty - (I_\infty - I_0) e^{-W/\chi}$ an, wo χ als Stabilitätskonstante bezeichnet wird. In diesem Falle nimmt die Neigung dI/dW linear mit I ab. Die Analyse der experimentell erhaltenen Kurve ergibt nun, daß ihre Neigungskurve aus drei geraden Linien, durch kurze gekrümmte Stücke verbundenen Teilen besteht. Auf Grund der obigen theoretischen Befunde wird angenommen, daß in jedem dieser geradlinigen Teile nur die Kristallite einer bestimmten Größe zerfallen, längs eines gekrümmten Teils dagegen eine weitere Größe mitzerfällt, bis der Endzustand, in welchem alle Kristallite die Endgröße besitzen, erreicht ist. Es wird begründet, daß im Zugversuch der erste Übergang bei der Zugfestigkeit (maximale Nennspannung), der zweite bei der Reißfestigkeit (maximale wahre Spannung) stattfindet. Zahlenmäßig ergeben sich für den untersuchten Stahl für die anfänglichen Kristallitgrößen die Werte 3,2, 2,6 und 1,9 (Endgröße = 1 gesetzt) und für ihre Volumanteile die Werte 4, 9 und 87%.

A. Kochendörfer (Stuttgart).